GEOMETRIA SOLIDA

DI

CARLO ROCCO

PROFESSORE DI MATEMATICA NEL R. COLLEGIO MILITARE,
SOCIO RESIDENTE DELL' ACCADEMIA PONTANIANA.

QUARTA EDIZIONE

RIVEDUTA, CORRETTA ED ACCRESCIUTA

Mathesis philosophiae, et scientiis
initia, ac veluti mammam praebet.
BACONE.

NAPOLI
Dallo Stabilimento del Guttemberg
Vico Purgatorio ad Arco n.° 9.

1849

PREFAZIONE

La geometria solida tratta dei piani, e degli angoli solidi; dei poliedri o solidi terminati da superficie piane; e finalmente dei tre corpi rotondi, vale a dire del cono retto, del cilindro retto, e della sfera. Quindi in questa quarta edizione abbiam stimato di dividere la nostra istituzione di geometria solida in tre libri analogamente a ciò che abbiam fatto nella quarta edizione della geometria piana, che pure è stata divisa in tre libri. La divisione in capitoli è rimasta come era nelle due edizioni precedenti, vale a dire che ogni capitolo contiene una particolare teoria, senza miscugli. In tal modo si evita il grave inconveniente di disporre le proposizioni ad arbitrio, con la sola condizione di mantenere l'esattezza delle dimostrazioni; inconveniente che si osserva nei più celebri scrittori di elementi geometrici.

Nell' edizioni precedenti esponemmo la teorica compiuta degli angoli solidi triedri: in questa abbiamo leggiermente modificata la dimostrazione della proposizione, che riguarda l'eguaglianza degli angoli diedri, quando gli angoli piani di due angoli solidi triedri sono rispettivamente uguali; e ci sembra che quella fondamentale proposizione sia ora dimostrata col più grande rigore possibile. La dimostrazione di Legendre, e piuttosto di Roberto Sismon, non è generale, perchè suppone tacitamente che due degli angoli piani sopraccennati siano acuti; e per conseguenza la teorica degli angoli solidi vacillava nelle fondamenta. Oltre a ciò si troveranno in questa edizione messe al loro posto le condizioni che determinano gli angoli solidi poliedri, senza miscuglio di problemi ausiliarj. che si trovano in Legendre; e però, se non c' inganniamo, la teorica degli angoli solidi in generale trovasi esposta in un modo compiuto, almeno per quanto spetta alla parte elementare della scienza.

La teorica dei poliedri è monca ed imperfetta in Euclide, come tutti sanno; e come doveva essere, perchè ai tempi di questo geometra la teorica degli angoli solidi era nell'infanzia. I geometri moderni, e soprattutto Legendre, l'hanno perfezionata ed ingrandita; purtuttavolta il sistema di Euclide era rimasto inalterato, in quanto alla sostanza delle cose. Non si era ridotta la teorica dei poliedri a quella della piramide triangolare; e però bisognava passare per una serie di proposizioni relative ai parallelepipedi, le quali riescono difficili ad apprendersi ed a ritenersi dagli studiosi, come è noto a tutti quelli che hanno pratica dell' insegnamento della geometria. Per levare queste difficoltà fummo obbligati a rifare quasi dalle fondamenta la teorica dei poliedri, mettendo a profitto le meditazioni degli antichi e de' moderni geometri, non che le nostre, qualunque esse siano.

In questa edizione il solo cangiamento, che si osserverà è relativo alla proposizione, in cui si tratta di esprimere in linee il rapporto di due poliedri dati. All'antica dimostrazione si è sostituita un'altra, che abbiam trovata più facile nell'insegnamento.

La teorica dei tre corpi rotondi è rimasta come era nelle due edizioni precedenti; solamente si osserveranno quà e là alcune giunte e modificazioni, che servono a rendere più chiare le dimostrazioni. Siffatte giunte e modificazioni si troveranno soprattutto nell' ultimo capitolo, che tratta dei triangoli sferici. Ci limiteremo qui a citare le proposizioni relative alla misura della piramide sferica, e dell' angolo solido, che trovasi accennata nella geometria di Legendre, ma non dimostrata. Finck, geometra francese, ha procurato di riempiere una siffatta lacuna nei suoi elementi di geometria; ma, se non andiamo errati, i principj, dai quali è partito, avevano bisogno per lo meno, di esser messi fuori di ogni dubbio per ciò che spetta alla misura dell' angolo solido. Ci sembra di esser riusciti a toglierc di mezzo ogni difficoltà intorno alla suddetta misura; in guisa che la nostra istituzione di geometria solida può ora considerarsi come compiuta.

In una lunga nota, messa alla fine del libro nella prima edizione, e nella prefazione alla seconda edizione esponemmo le ragioni, che ci avevano indotti a prescegliere il metodo degl' infinitamente piccoli nelle dimostrazioni relative alla misura delle superficie, e delle solidità dei tre corpi rotondi, mettendo da banda le pesanti e tortuose dimostrazioni di Maurolico, che sono state adottate da Legendre, e da qualche traduttore di Euclide, non che quelle dei limiti, che si trovano in Lacroix, ed in alcuni altri scrittori di elementi geometrici. Qui ci limiteremo a fare alcune altre osservazioni.

Il metodo degl' infinitamente piccoli, quando venga adoperato come si conviene, è tanto esatto quanto quello di esaustione adoperato da Archimede, e quello de' limiti; perocchè questi tre metodi poggiano sopra una medesima base (*). Se dunque si adoperi il metodo degl' infinitamente piccoli in modo che le dimostrazioni fatte con esso si possano tradurre in quelle fatte col metodo de' limiti, o di esaustione, cambiando le frasi, ed introducendo le opportune costruzioni, esse dimostrazioni avranno tutto il rigore possibile; ed oltre a ciò avranno il prezioso vantaggio d' imprimersi facilmente nella memoria, e di conservare le tracce dell' invenzione. Ed ecco perchè alcuni de' più recenti scrittori francesi di elementi di geometria hanno scelto a preferenza il metodo degl' infinitamente piccoli, che hanno adoperato nel modo sopraccennato, e non già come avevano fatto Caravelli, Niccolò de Martino, Bezout, ed altri elementisti, le dimostrazioni dei quali non si possono tradurre in quelle fatte col metodo dei limiti, o di esaustione, perchè partono da principj vaghi, e non da quelli che servono di base comune ai tre metodi. Quindi in questa nuova edizione abbiam conservato il metodo degl' infinitamente piccoli nelle dimostrazioni relative alla misura delle superficie e delle solidità dei tre corpi rotondi; dando ad esse una forma tale che ognuno potrebbe, volendo facilmente tradurre in quelle fatte col metodo de' limiti, ed anche di esaustione; perchè, ripetiamo, il punto di partenza de' tre metodi è lo stesso.

Ma a malgrado la chiarezza delle precedenti ragioni, di quelle da noi dette nelle precedenti edizioni, e di altre che uomini di miglior ingegno del nostro hanno detto, o potranno dire, la forza di un' antica tradizionale opinione fa sì che alcuni, che non hanno mai conosciuto lo spirito dei metodi, persistono ad essere immobilmente attaccati alle antiche forme di ragionamento, e non vogliono ammettere che la considerazione dell' infinito possa introdursi senza maschera negli elementi di geometria. Ad imitazione degli antichi Pittagorici, de' quali fa menzione uno scoliaste di Euclide alla fine del libro X di questo geometra, gridano la croce addosso a chi fa uso di quella considerazione, a fine di render piana e facile la istituzione geometrica; e non hanno per buona una dimostrazione, se non quando conserva una cert' aria di mistero, e sia appoggiata a lunghi e difficili ragionamenti, che facciano la disperazione degli giovani studiosi.

(*) Methodus, quam exhaustionum vocant, *eodem fundamento innititur*, quo metodus infinitesimalis, sed multo est implicatior et longior.
Boscovich, T. I. pag. 164.

Questi geometri trascendentali credono profanata la scienza, quante volte le dimostrazioni relative alla misura delle superficie e delle solidità de' tre corpi rotondi, non sono fatte con quei giri tortuosi, e con quello apparato di proposizioni preparatorie, che s' incontrano nelle dimostrazioni di Maurolico, le quali erano eccellenti nel tempo, in cui apparvero, perchè più facili di quelle di Archimede, ma ora non possono essere sostenute che dalle sole menti pregiudicate. Ed infatti abbiam provato nelle due edizioni precedenti, che le dimostrazioni di Maurolico non si possono giustificare senza ricorrere alla considerazione dell'infinito, che non pertanto si vorrebbe proscrivere dagli elementi di geometria.

Da questa pregiudicata maniera di vedere le cose risultano non pochi inconvenienti. Imperocchè gli studiosi dopo gli elementi di geometria non sentono più parlare di quelle rancide e viete forme di ragionamento; e s' incontrano a viso scoperto nella considerazione dell' infinito, che con tanta cura si era loro nascosta negli elementi, ed allora insorgono difficoltà, che non essendo state risolute nel luogo opportuno, il maggior numero degli studiosi non apprende che la parte materiale delle Matematiche, come insegna una trista esperienza.

Nè i pregiudizj in fatto d' istituzione geometrica si limitano alla sola considerazione dell' infinito. Vi sono alcuni, i quali non vogliono che s' induca negli elementi geometrici l' ordine rigoroso delle proposizioni, e quel legame che serve a mostrare tutt' i punti di contatto di esse, ed a produrre nella mente una piena acquiescenza. Nella opinione di questi sapienti il disordine nelle proposizioni, ed il pesante e dommatico apparato nelle dimostrazioni costituiscono il sublime di una istituzione geometrica. Essi pretendono che gli elementi di geometria sono fatti da gran tempo; e che gli studiosi non debbano far altro che imparare come meglio possano quel dato numero di proposizioni, che si è convenuto dover far parte degli elementi geometrici, con la sola condizione di non dipartirsi da quelle dimostrazioni, che l' uso ha consacrato. Con questa specie di armonia prestabilita come si può sperare che quei sapienti approvino tutte quelle innovazioni, che partendo dall' esame profondo dei principj, sui quali poggia la geometria, tendono a renderla più chiara, più rigorosa, e più facile ad apprendersi?

Ed ecco perchè alcuni geometri non trovando la misura delle aje e de' volumi in Euclide, pretendono che debba esser proscritta dagli elementi di geometria; altri al contrario l' ammettono, ma sostengono che debba esser dedotta come conseguenza

de' rapporti di quelle aje, e di quei volumi, perchè così la trovano in Legendre, ed in altri moderni scritiori di elementi. Epperò stando ad una siffatta pretenzione la misura dell' aja del rettangolo, quella del cerchio, del parallelepipedo rettangolo, del cilindro retto, del cono retto, della sfera, etc.... dovrebbe dedursi dalle proposizioni che danno i rapporti de' rettangoli, de' parallelepipedi, de' cilindri, de' coni, delle sfere, etc.... Ed intanto Archimede, il massimo fra i geometri, ha dimostrato prima chè il cerchio ha per misura il prodotto della circonferenza per la metà del raggio; e poi da questo teorema ha dedotto che le circonferenze de' cerchi stanno come i raggi. Parimente ha prima parlato delle misure delle superficie e delle solidità dei tre corpi rotondi, e poi de' rapporti, che hanno fra loro quelle supercie, e quei volumi; e lo stesso Legendre ha seguito questo cammino là dove parla dei tre corpi rotondi. Volendo dunque mantenere l' ordine logico delle idee, bisogna che nella geometria piana e solida si espongano prima i teoremi relativi alle misure delle aje e de' volumi, poi quelli che spettano ai rapporti di quelle aje, e di quei volumi: oppure che si parli prima di questi rapporti, e poi delle misure. Ma fare ora in un modo, ora in un altro ci sembra che nuoccia al regolare andamento dell'istituzione geometrica; e però tanto nella geometria piana, quanto nella solida abbiam tenuto il cammino di Archimede, anche perchè un siffatto cammino serve ad abbreviare le dimostrazioni, soprattutto nella geometria solida. Ciò non ostante siam persuasi che per lungo tempo ancora si continuerà a battere la vecchia strada, perchè è difficile levare i pregiudizj, soprattutto quando hanno un' antica data, onde non spingeremo più oltre le nostre considerazioni, e lasceremo ai dotti la cura di dar giudizio intorno al nostro lavoro.

GEOMETRIA SOLIDA

LIBRO PRIMO

DE' PIANI E DEGLI ANGOLI SOLIDI.

CAPITOLO PRIMO

DELLA LINEA RETTA E DEL PIANO IN GENERALE

1. La *Geometria Solida* considera l' estensione nelle sue tre dimensioni; per cui le linee rette ed i piani si riguardano come situati in qualsivoglia modo nello spazio. E qui giova ricordarsi che la linea retta è di sua natura indefinita, come pure il piano, abbenchè spesso occorra di dover considerare soltanto una parte limitata dell' una o dell' altro. Laonde quando si dice che un punto è situato fuori di una linea retta, o fuori di un piano, si deve intendere che il punto accennato trovasi al di sopra, o al di sotto della retta, o del piano; o sia sempre fuori de' loro prolungamenti.

PROPOSIZIONE I — *TEOREMA*.

2. *Una linea retta non può avere una sua parte in un piano, e la rimanente fuori del piano medesimo* (fig. 1).

Dimostrazione. Rappresenti la figura MN un piano qualunque, e si supponga che la linea retta ABD abbia una parte AB nel piano MN, e la rimanente BD fuori di questo piano. Essendo AB una linea retta, essa potrà prolungarsi in C nel piano MN; per conseguenza le due rette ABD, ABC avrebbero due punti comuni A, e B senza coincidere in tutta la loro estensione; ma ciò è impossibile,

dunque una linea retta non può avere una parte in un piano, e la rimanente fuori del piano medesimo:

3. *Corollario.* Apparisce da questo teorema che una linea retta non può incontrare un piano in più di un punto; poichè se lo incontrasse in due punti, dovrebb essere tutta intera situata nel piano medesimo. Il punto d' incontro di una retta con un piano dicesi il *piede* della retta sullo stesso piano.

PROPOSIZIONE. II — *TEOREMA.*

4. *Un triangolo qualunque è situato in un solo piano* (fig. 2).

Dim. Sia ABC un triangolo qualunque. Se una sua parte BDEC fosse situata in un piano; e la rimanente DAE in un altro, la retta AB avrebbe una sua parte BD nel primo piano, e l' altra DA nel secondo; il che non può sussistere (n° 2); dunque un triangolo è sempre in un solo piano.

5. *Corollario.* Si deduce da questo teorema che *per tre punti* A, B, C *non disposti in linea retta passa un solo e medesimo piano.*

Infatti congiungendo i tre punti colle rette AB, AC, BC, il triangolo ABC è situato in un solo piano. Quindi per un punto A posto fuori di una retta BC, e per questa retta medesima si può sempre far passare un piano; poichè basta prendere due punti B, e C ad arbitrio nella retta accennata, e condurre il piano per i tre punti A, B, C, nè altro piano potrà passare per la data retta e pel punto dato.

PROPOSIZIONE III — *TEOREMA.*

6. *Due rette che s' incontrano sono situate in un medesimo piano* (fig. 3).

Dim. Perocchè, prendendo ad arbitrio due punti P e N nelle due rette NM, e PQ che s' incontrano nel punto F, e condotta la retta PN, le due linee PF, e NF sono situate nel piano del triangolo PFN: per cui anche le rette MN e PQ dovranno trovarsi nel medesimo piano (n° 2).

PROPOSIZIONE IV — *TEOREMA.*

7. *Una retta che incontra due altre situate in un piano, dovrà trovarsi nel medesimo piano* (fig. 4).

Dim. Infatti, supponendo che la retta HO incontri le rette AB, e CD situate in uno stesso piano. i punti L, ed E d incontro si troveranno nel detto piano; e però tutta la retta HO dovrà stare nel piano medesimo (n° 3.).

PROPOSIZIONE V — *TEOREMA.*

8. *L'intersezione comune di due piani che s'incontrano è una linea retta* (fig. 5).

Dim. Sia AB l'intersezione comune di due piani MN, e PQ. È manifesto che questa intersezione deve essere una linea, ed una linea retta; perciocchè se potesse essere una porzione di superficie, o una linea curva, i due proposti piani avrebbero sempre più di due punti di comune non disposti in linea retta, e si confonderebbero l' uno con l'altro (n° 5) contro la supposizione; dunque l' intersezione comune di due piani è una linea retta.

9. *Scolio.* I principj fin qui esposti sono, come si è veduto, corollarj manifesti della nozione che abbiamo della linea retta, e del piano; in güisa che si potrebbero considerare quasi come assiomi. Essi sono della più grande importanza, perchè sopra siffatti principj semplicissimi è stabilita tutta la geometria solida.

Or siccome nella geometria piana la prima cosa che abbiamo considerata è stato l'incontro, o il non incontro delle rette situate in un piano, così pure nella geometria solida la prima cosa da considerarsi dovrà essere l'incontro, o il non incontro delle linee rette con i piani, e l'incontro, o il non incontro dei piani fra loro, senza che lo spazio rimanga chiuso da per ogni dove.

CAPITOLO II.

DELLE RETTE PERPENDICOLARI ED OBLIQUE AI PIANI.

10. Per una medesima linea retta AP (fig. 6.) può passare una infinità di piani differenti; dappoichè un piano può girare intorno ad una linea retta condotta in esso comunque, e prendere in questo modo un numero infinito di situazioni diverse senza che i punti della retta cangiano sito. Ciò premesso, si facciano passare per la retta AP due piani differenti APB, ed APC, indi da un medesimo punto P di questa retta si conducano sopra AP le perpendicolari PB, PC, l' una nel piano APB, e l' altra nel piano APC. Or queste due perpendicolari determinano la posizione di un piano MN, poichè s'incontrano nel punto P (n° 6), per conseguenza riesce naturale il ricercare se tirando pel punto P nel medesimo piano MN una qualunque altra retta PD, questa sia pure perpendicolare ad AP.

PROPOSIZIONE VI — *TEOREMA.*

11. *Se una retta* AP *è perpendicolare a due rette* PB, PC *che s' intersegano nel suo piede* P *nel piano* MN, *essa sarà perpendicolare a qualsivoglia retta* PD *condotta pel punto* P *nel piano medesimo* (fig. 6).

Dim. Si prolunghino le rette PB, PC, PD, verso H, E, F, si prenda PB uguale a PH, PC uguale a PE, e si tirino le rette BC, EH; indi da un punto A della perpendicolare AP si conducano le rette AB, AH, AC, AE, AD, AF.

Poichè l'angolo BPC è uguale al suo verticale EPH, il triangolo BPC sarà uguale al triangolo EPH; per conseguenza si avrà BC=EH, e l'angolo PCD=PEF. Or essendo di più l'angolo DPC uguale al suo verticale EPF, ed il lato PC=PE, ne segue che il triangolo DPC è uguale al triangolo EPF; e perciò risulta PD=PF, e DC=EF. Da un' altra parte nel piano ABH le oblique AB, AH sono uguali come equidistanti dalla perpendicolare AP, e lo stesso deve dirsi delle oblique AC, AE nel piano ACE, dunque i triangoli ABC, AEH sono equilateri fra loro, e però l'angolo ACD è uguale all' angolo AEF. Quindi i due triangoli AEF, ACD hanno un angolo uguale compreso fra lati respettivamente uguali, per cui sono uguali, ed il lato AD è uguale al lato AF. Finalmente i triangoli APD, APF risultano equilateri fra loro, e però l' angolo APD sarà uguale all' angolo APF, ovvero AP è perpendicolare a PD.

12. *Definizione.* Una retta dicesi *perpendicolare* ad un piano quando è perpendicolare a tutte le rette che passano pel suo piede in questo piano; poichè in tal caso forma angoli adiacenti uguali con tutte le rette accennate.

Reciprocamente, un piano si dice perpendicolare ad una retta, allorchè contiene tutte le perpendicolari condotte a questa retta per un medesimo punto di essa.

13. *Corollario.* Apparisce da questa proposizione che

Se l'angolo retto APC *gira intorno ad un suo lato* AP *supposto immobile, l'altro lato* PC, *che non cesserà di essere perpendicolare ad* AP, *descriverà nel suo movimento il piano* MN *perpendicolare ad* AP (fig. 6).

Infatti, supponendo che il lato mobile PC sia giunto in PB, il piano che passa per queste due rette è determinato, e la retta PC in tutte le sue posizioni non potrà mai trovarsi fuori di questo piano, perchè tutte le rette che si conducono pel punto P nel piano MN sono perpendicolari ad AP, e quindi coincidono con le varie posizioni del lato mobile PC.

PROPOSIZIONE VII — *TEOREMA.*

14. ***Per un punto dato non si può condurre ad un piano che una sola perpendicolare*** (fig. 7).

Dim. Sia A un punto situato fuori del piano MN, e si supponga, se è possibile, che le rette AP, AD sieno due perpendicolari a questo piano; indi si conduca la retta PD. Nel triangolo APD vi sarebbero due angoli retti, il che è assurdo; dunque dal punto A non si può abbassare sul piano MN che una sola perpendicolare.

Se poi il punto dato è P nel piano MN, e si supponga che le rette PA, PE sieno due perpendicolari al piano medesimo, allora facendo passare per le dette perpendicolari un piano che tagli il piano MN secondo la retta PD, gli angoli APD, EPD sarebbero retti ambidue; e però la parte sarebbe uguale al tutto, il che non può sussistere. Dunque per un punto dato non si può condurre ad un piano che una sola perpendicolare.

PROPOSIZIONE VIII — *PROBLEMA.*

15. *Per un punto* A *situato fuori di un piano* MN *abbassare una perpendicolare sopra questo piano* (fig. 8).

Soluzione. Si conduca una retta BC nel piano MN, per questa retta e pel punto A si faccia passare un piano (n. 5.), indi in questo si abbassi sopra BC la perpendicolare AD, e dal punto D si conduca nel piano MN la retta DP perpendicolare a BC. Finalmente si faccia passare un piano per le rette AD, DP, ed in questo piano si cali sopra DP la perpendicolare AP, questa sarà perpendicolare al piano MN.

Infatti, si prenda BD=CD, e si tirino le rette PB, PC, AB, AC, il quadrato di AB è uguale ai quadrati di AD, e DB. perchè è retto l'angolo ADB; ma per la stessa ragione il quadrato di AD è uguale alla somma de' quadrati di AP, e di PD. dunque sarà il quadrato di AB uguale alla somma dei tre quadrati di AP. PD, DB, ovvero dei quadrati di AP, PB, perchè è retto l'angolo PDB. Sicchè l angolo APB è retto, e nello stesso modo potendo dimostrarsi che l'angolo APC è retto, ne segue che AP è perpendicolare al piano MN (n° 11).

PROPOSIZIONE IX — *TEOREMA.*

16. *Se da un punto* A *situato fuori di un piano* MN *si conducano sopra questo piano la perpendicolare* AP, *e differenti oblique* AB, AD, AC, AE, ecc.

1.° *La perpendicolare sarà più corta di ogni obliqua.*

2.° *Le oblique equidistanti dalla perpendicolare saranno uguali fra loro.*

3.° *Di due oblique qualunque, quella che più si allontana dalla perpendicolare sarà la più lunga* (fig. 6).

Dim. Infatti, se si conducano le rette PB. PD, PC, PE ecc.; e si facciano girare gli angoli retti APC. APD, APE, ecc: intorno ad AP, tutte le oblique potranno ridursi ad essere situate in un medesimo piano ABH; e per conseguenza il teorema proposto si dimostrerà come nella geometria piana (n. 75).

PROPOSIZIONE X — *TEOREMA*.

17. *Se da un punto* A *della retta* AD *obliqua al piano* MN *si abbassi la perpendicolare* AP *sopra questo piano, e si conduca la retta* DP, *l'obliqua* AD *sarà perpendicolare alla retta* BC *tirata perpendicolarmente a* DP *nel piano* MN (fig. 8).

Dim. Si prenda BD=CD, e si tirino le rette PB, PC, AB, AC. Essendo BD=CD, le oblique PB, PC saranno uguali perchè equidistanti dalla perpendicolare PD. Parimente le oblique AB, AC saranno uguali come equidistanti dalla perpendicolare AP, dunque rispetto ad AD le rette AB, AC sono due oblique uguali, ed equidistanti, e per conseguenza AD è perpendicolare a BC.

Corollario. Essendo la retta BC perpendicolare alle due rette DP, e DA, sarà perpendicolare al piano APD che passa per le rette medesime (n. 11).

PROPOSIZIONE XI — *PROBLEMA*.

19. *Da un punto* D *situato nel piano* MN *innalzare una perpendicolare sopra questo piano* (fig. 9).

Sol. Da un punto A situato fuori del piano MN si abbassi sopra questo piano la perpendicolare AP, e si conduca la retta PD; indi si faccia passare per le rette AP, PD un piano, nel quale si tiri la retta DE perpendicolare a DP, sarà DE la perpendicolare richiesta. Infatti, se si conduca la retta BC perpendicolarmente a DP nel piano MN, l'angolo EDB sarà retto; perchè BD è perpendicolare al piano APDE (n. 18), e per conseguenza a tutte le rette che sono in esso come la DE. Ma per costruzione è retto l'angolo EDP, dunque la retta ED è perpendicolare alle due rette DP, DB, e però è perpendicolare al piano MN.

PROPOSIZIONE XII — *PROBLEMA*.

20. *Per un punto* O *di una retta* AE *condurre un piano perpendicolare a questa retta* (fig. 10).

Sol. Si facciano passare per la retta data due piani qualunque. In uno di questi piani si conduca la retta OB perpendicolare ad AE; e nell' altro la retta OC anche perpendicolare ad AE. Finalmente per le rette OB, OC si faccia passare un piano MN, questo sarà perpendicolare alla retta data (n. 12); poichè essendo AO perpendicolare alle due rette OB, OC, dev' essere perpendicolare al piano determinato da queste rette.

PROPOSIZIONE XIII — *PROBLEMA*.

21. *Per un punto* B *situato fuori di una retta* AE *condurre un piano perpendicolare a questa retta* (fig. 10).

Sol. Pel punto dato B e per la retta AE si conduca un piano, nel quale si abbassi BO perpendicolare sopra AE; secondo questa ultima retta si conduca un altro piano qualunque; ed in essa s' innalzi OC perpendicolare ad AE. Finalmente per le rette BO ed OC si faccia passare un piano, questo sarà il piano richiesto; poichè contiene BO, ed OC ambedue perpendicolari ad AE.

CAPITOLO III.

DELLE RETTE PARALLELE FRA LORO, E DELLE RETTE PARALLELE AI PIANI.

22. Nella proposizione X (fig. 9) si è veduto che le rette BC, AP, situate l'una nel piano MN, l'altra nel piano APD, sono perpendicolari ad una medesima retta DP. Or è da osservarsi che quantunque queste due perpendicolari non possano incontrarsi, pure non si dicono *parallele*: dappoichè si è convenuto di chiamar esclusivamente *rette parallele* quelle ch' essendo situate in un medesimo piano non s' incontrano mai. Epperò quando si mette per ipotesi che due rette date sono parallele, si sottintende implicitamente che sono poste in un medesimo piano. Da ciò ne consegue che

Due rette parallele determinano la posizione di un piano.

23. *Definizione.* Una retta si dirà essere *parallela* ad un piano, allorchè prolungandosi l' una e l'altro non s'incontrano mai.

PROPOSIZIONE XIV — *TEOREMA*.

24. *Se due rette* AP, ED *sono parallele, ed una di esse è perpendicolare ad un piano* MN, *anche l'altra sarà perpendicolare al medesimo piano* (fig. 9).

Dim. Sia AP perpendicolare al piano MN: si tirino le rette PD, AD, e nel piano MN si conduca a DP la perpendicolare BC, questa sarà pure perpendicolare al piano APD (n° 18), ovvero al piano APDE delle parallele AP, DE. Quindi sarà retto l'angolo EDB; ma in virtù delle medesime parallele è anche retto l' angolo EDP, dunque la retta ED è perpendicolare alle due DB, DP, e per conseguenza al piano MN.

PROPOSIZIONE XV — *TEOREMA.*

25. *Due rette* AP, ED *perpendicolari ad un medesimo piano* MN *sono parallele fra loro* (fig. 9).

Dim. Perocchè, se ED non è parallela ad AP, si conducano le rette PD. AD, e nel piano APD si tiri pel punto D una retta parallela ad AP, la quale sarà perpendicolare al piano MN (n° 24). Ma per ipotesi anche DE è perpendicolare ad MN; dunque si potrebbero innalzare dal punto D due perpendicolari ad un medesimo piano, il che è assurdo; e però ED è parallela ad AP.

26. *Corollario.* Segue da questo teorema che per un punto P preso fuori di una retta ED non si può condurre a questa retta che una sola parallela PA. Infatti, pel punto P si faccia passare un piano MN perpendicolare alla retta DE (n° 20); se pel punto P si potesse condurre a DE un' altra parallela, questa sarebbe perpendicolare al piano MN, ed allora per uno stesso punto si potrebbero innalzare due perpendicolari al piano MN, il che non può sussistere.

PROPOSIZIONE XVI — *TEOREMA.*

27. *Per un punto dato condurre una parallela ad una retta data* (fig. 9).

Sol. Sia P il punto dato, e DE la retta data; per questo punto e la retta accennata si faccia passare un piano, nel quale si conduca PA parallela a DE, è manifesto che PA sarà la parallela richiesta.

PROPOSIZIONE XVII — *TEOREMA.*

28. *Due rette* AB, DF *parallele ad una terza* CE *sono parallele fra loro* (fig. 11).

Dim. Per un punto E della retta CE si conduca un piano perpendicolare a questa retta (n° 20), le rette AB, DF essendo per ipotesi parallele a CE, saranno perpendicolari al piano MN (n° 24.) e però saranno parallele fra loro.

29. *Scolio.* Il teorema analogo; cioè quando le tre rette sono situate in un medesimo piano è stato dimostrato nella geometria piana (n° 48).

PROPOSIZIONE XVIII — *TEOREMA.*

30. *Se una retta* AB *situata fuori di un piano* MN *è parallela ad una retta qualunque* CD *condotta in questo piano, essa sarà parallela al piano medesimo* (fig. 12).

Dim. Essendo parallele le rette AB, CD, saranno situate in un medesimo piano ABCD, per conseguenza se AB prolungata incontrasse il piano MN, dovrebbe ancora incontrare la retta CD, contro la supposione; dunque AB è parallela al piano MN.

CAPITOLO IV.

DEI PIANI PARALLELI FRA LORO.

31. *Definizione.* Due piani si dicono *paralleli*; allorchè prolungati indefinitamente non possono incontrarsi.

PROPOSIZIONE XIX — *TEOREMA.*

32. *Due piani* MN, PQ *perpendicolari ad una medesima retta* AB *sono paralleli fra loro* (fig. 13).

Dim. Perocchè se i due piani non sono paralleli, prolungati sufficientemente dovranno incontrarsi: sia O un punto della loro comune intersezione, e da questo punto si tirino le rette OA, OB, che giaceranno nei piani. Essendo per ipotesi la retta AB perpendicolare ai due piani, gli angoli OAB, OBA saranno retti (n.° 11); per conseguenza nel triangolo OAB vi sarebbero due angoli retti, il che è assurdo; dunque i due piani sono paralleli.

PROPOSIZIONE XX — *TEOREMA*

33. *Le intersezioni* AB, CD *di due piani paralleli* MN, PQ *con un terzo piano* ABCD *sono parallele fra loro* (fig· 12).

Dim. Infatti, se AB potesse incontrare CD, il punto d' incontro dovrebbe trovarsi nei due piani MN, PQ: ma per ipotesi questi due piani sono paralleli, e perciò non possono avere alcun punto comune, dunque anche AB è parallela a CD.

PROPOSIZIONE XXI — *TEOREMA.*

34. *Se due piani* MN, PQ *sono paralleli, ogni retta* AB *perpendicolare all' uno è ancora perpendicolare all' altro* (fig 13)

Dim. Sia AB perpendicolare al piano PQ; si conduca una retta BC comunque nel piano medesimo, poi per le due AB, BC si faccia passare un piano che tagli il piano MN secondo la retta AD. Essendo per ipotesi paralleli i due piani MN, PQ, le intersezioni AD, BC di questi piani col piano DABC saranno parallele (n. 33); ma AB è perpendicolare a BC, perchè si è supposta perpendicolare al

piano PQ, dunque AB sarà ancora perpendicolare ad AD; e siccome per ipotesi BC è una retta qualunque, ne segue che AB è perpendicolare a tutte le rette che passano pel suo piede A nel piano MN ovvero è perpendicolare a questo piano.

35. *Corollario.* Da questo teorema s' inferisce che per un punto B situato fuori di un piano MN non si può condurre che un solo piano parallelo al piano MN. Perocchè se si potessero condurre due piani paralleli, essi sarebbero ambidue perpendicolari alla retta AB abbassata dal punto B perpendicolarmente sopra il piano MN; ed in tal caso per un punto di una retta si potrebbero innalzare due piani perpendicolari alla retta medesima, il che non può sussistere, (n. 35).

36. *Corollario II Due piani paralleli ad un terzo piano sono paralleli fra loro*: perocchè se s'incontrassero, da un punto della loro comune intersezione si potrebbero condurre due piani paralleli ad un altro piano; il che è impossibile (n. 35).

PROPOSIZIONE XXII — *PROBLEMA*

37. *Per un punto dato* B *condurre un piano parallelo ad un piano* MN (fig. 13).

Sol. Dal punto B si abbassi sopra il piano MN la perpendicolare BA, indi pel medesimo punto si conduca un piano PQ perpendicolare alla retta BA (n. 20), è manifesto che PQ sarà il piano richiesto (n. 32)

PROPOSIZIONE XXIII — *TEOREMA*.

38. *Le rette parallele* AC, BD *comprese fra i primi paralleli* MN, PQ *sono uguali fra loro* (fig. 12.)

Dim. Infatti, essendo AC parallela a BD, esse saranno situate in un medesimo piano ABDC, di cui le intersezioni con i piani MN, PQ sono parallele (n. 33). La figura ABDC è dunque un parallelogrammo; e però si avrà AC=BD.

39. *Corollario.* Da questo teorema si deduce che

Due piani paralleli sono equidistanti fra loro.

Infatti, se due rette AC, BD sono perpendicolari ai piani (fig. 12) PQ, MN, ciascuna di esse sarà la più corta distanza di questi piani, perchè ogni obliqua sarebbe più lunga.

PROPOSIZIONE XXIV — *TEOREMA*.

40. *Due rette comprese fra tre piani paralleli sono divise in parti proporzionali* (fig. 14.)

Dim. Sieno le rette AB, CD comprese fra tre piani paralleli MN PQ , RS ; si tiri la retta AD che incontri il piano PQ nel punto G: indi si conducano le rette AC, EG , FG , BD.

Le intersezioni EG , BD dei piani paralleli PQ , RS col piano ABD essendo parallele (n. 33) , le rette AB , AD saranno divise in parti proporzionali nei punti E, G , e però la ragione di AE ad EB sarà uguale a quella di AG a GD. Parimente essendo AC parallela a GF; sarà la ragione di AG a GD uguale a quella di CF a FD; ma due ragioni uguali ad una terza sono uguali fra loro, dunque, AE : EB :: CF : FD.

CAPITOLO V.

DEGLI ANGOLI CHE LE RETTE FANNO TRA LORO NELLO SPAZIO, E DEGLI ANGOLI CHE FORMANO CON I PIANI

41. Quando due rette si tagliano nello spazio, esse determinano un piano; per conseguenza tutto ciò che si è dimostrato nella geometria piana intorno agli angoli formati da due rette sopra un piano può applicarsi agli angoli formati da due rette che si tagliano nello spazio. Qui dunque esporremo ciò che riguarda gli angoli che non sono situati nello stesso piano.

PROPOSIONE XXV — *TEOREMA.*

42. *Se due angoli non situati nello stesso piano hanno i lati respettivamente paralleli e rivolti dalla stessa parte, essi saranno uguali, ed i loro piani saranno paralleli* (fig. 11).

Dim. Sieno CAD, EBF due angoli situati l'uno nel piano PQ; e l'altro nel piano MN ; si faccia AC = BE, AD = BF , e si conducano le rette AB , CE , DF , CD , EF.

Essendo AC uguale e parallela a BE, la figura ABEC sarà un parallelogrammo ; e però sarà AB uguale e parallela a CE. Parimente si dimostra che AB è uguale e parallela a DF , dunque CE è uguale e parallela a DF (n. 28), onde si avrà CD=EF, ed il triangolo CAD sarà uguale al triangolo EBF ; e l'angolo CAD=EBF.

In secondo luogo, il piano CAD sarà parallelo al piano EBF. Infatti , se pel punto A si conducа un piano parallelo al piano BEF, questi due piani dovranno incontrare le tre rette parallele AB , CE, DF in modo che le parti di queste rette comprese fra essi sieno uguali. (n. 28); ma AB, CE, DF sono uguali fra loro, dunque il piano parallelo al piano BEF deve confondersi col piano ACD.

PROPOSIZIONE XXVI — *TEOREMA*

43. *Se due rette non sono situate in un medesimo piano, saranno sempre situate in due piani paralleli* (fig. 15).

Dim. Sieno le due rette AB, CD non situate in un medesimo piano; si conduca pel punto E la retta EF parallela a CD, e pel punto C la retta GH parallela ad AB, il piano determinato dall'incontro delle rette BE, EF sarà parallelo al piano determinato dalle rette HC, CD (n. 42); per conseguenza le rette AB, CD saranno situate in piani paralleli.

44. *Scolio.* Quando due rette non sono situate in un medesimo piano, esse non formano angolo propriamente parlando, non ostante volendosi valutare la loro scambievole inclinazione si conduce per un punto di una di esse una retta parallela all'altra, e l'angolo formato dalle due rette misura l'inclinazione richiesta. Se poi una retta incontra un piano senza che sia a questo perpendicolare, essa può avvicinarsi più o meno al piano medesimo, ovvero essere più o meno inclinata a questo piano. La misura di siffatta inclinazione sarà data nel teorema qui appresso.

PROPOSIZIONE XXVII — *TEOREMA.*

45. *L'angolo* ADP *formato dalla obliqua* AD *e dalla retta che unisce il piede* D *della obliqua col piede* P *della perpendicolare* AP *al piano* MN, *misura la inclinazione della obliqua col piano medesimo* (fig. 16).

Dim. Perchè una siffatta misura possa essere legittima, convien dimostrare in primo luogo che l'angolo ADP non varia da qualunque punto della obliqua si abbassi la perpendicolare sul piano, ed in secondo luogo che l'angolo medesimo sia il più piccolo di tutti quelli che la obliqua accennata può fare con qualsivoglia altra retta DC condotta pel punto D nel piano MN.

1.° Sia EF un'altra perpendicolare abbassata da un punto qualunque E della obliqua AD sul piano MN. Le due rette AP, EF essendo perpendicolari ad un medesimo piano sono parallele fra loro; e determinano un piano, in cui si ritrova la retta AD, poichè una parte AE di questa retta si contiene nel detto piano; per conseguenza i punti P, F, D devono ancora trovarsi nel piano medesimo; ma questi stessi punti sono posti nel piano MN, dunque essi stanno nella intersezione comune dei due piani; vale a dire sono in linea retta. Laonde qualunque siasi la perpendicolare EF abbassata da un punto della obliqua AD sul piano MN, il suo piede F sarà sempre situato sopra la retta PD, e per conseguenza l'angolo ADP resterà sempre lo stesso.

2.° Si faccia DC = DF, e si conduca la retta EC; i due triangoli EDC, EDF hanno due lati respettivamente uguali a due lati, ma il terzo lato EC del primo è maggiore del terzo lato EF del secondo, perchè EF è perpendicolare, ed EC è obliqua al piano MN, dunque sarà l'angolo EDC maggiore dell'angolo EDF; e però l'angolo ADP sarà il più piccolo di tutti gli angoli che la obliqua AD può formare con qualsivoglia altra retta diversa da DP nel piano MN.

CAPITOLO VI.

DEGLI ANGOLI FORMATI DAI PIANI CHE S' INCONTRANO, OVVERO DEGLI ANGOLI DIEDRI.

46. *Definizione*. I. Allorchè due piani MD, CN (fig. 17) s' incontrano, la quantità più o meno grande di cui l' uno si allontana dall' altro, in quanto alla loro posizione, dicesi *angolo diedro*, cioè angolo a due facce. La comune intersezione DC chiamasi *spigolo* e corrisponde al vertice dell'angolo formato da due linee rette in un piano, mentre le facce MN, CD corrispondono ai lati di questo medesimo angolo, avvertendo nondimeno che lo spigolo, e le facce dell' angolo diedro si devono considerare sempre come indefiniti.

47. Per indicare un angolo diedro si adoperano comunemente quattro lettere: così volendo indicare l'angolo formato dai piani MD CN si dice: l'*angolo dietro* MCDN, avendo cura di mettere in mezzo le due lettere che servono a dinotare lo spigolo. La ragione di ciò è manifesta, dappoichè tre punti bastano a determinare la posizione di un piano, e quindi prendendo una lettera in ciascuna faccia, e due nello spigolo, si vengono a determinare i piani che formano l'angolo diedro. Pur tuttavolta è d'avvertirsi che può indicarsi un angolo diedro nominando soltanto due lettere prese nello spigolo, e perciò invece di dire; *l' angolo diedro* MCDN, si dirà semplicemente: *l' angolo diedro* CD, come talvolta s' indica un angolo piano rettilineo nominando la sola lettera del suo vertice.

48. *Definizione* II. Se per un punto qualunque O dello spigolo DC si conducano due perpendicolari OB, OA allo stesso spigolo, l'una nel piano CN, e l'altra nel piano MD, l'angolo AOB sarà un angolo piano rettilineo. All'angolo formato in tal guisa si dà il nome di *angolo piano corrispondente all' angolo diedro* MCDN, dappoichè quest'angolo è sempre lo stesso in tutti i punti dello spigolo. Infatti supponendo che le rette MC, KC sieno perpendicolari allo spigolo CD, l'angolo MCK sarà uguale all' angolo AOB, perchè hanno i lati respettivamente paralleli e rivolti dalla stessa parte (n° 24.)

49. È manifesto che un angolo diedro risulta uguale ad un altro angolo diedro, allorchè sovrapponendo una faccia del primo ad una faccia del secondo, e lo spigolo allo spigolo, la rimanente faccia del

primo combacia con la rimanente faccia del secondo, precisamente come avviene negli angoli piani rettilinei.

50. *Definizione* III. Un piano dicesi *perpendicolare* ad un altro allorchè forma con questo due angoli diedri adiacenti uguali fra loro. Ciascuno di questi angoli chiamasi *angolo diedro retto*. Si comprende che si debba intendere per *angolo diedro acuto*, *ed ottuso:*

PROPOSIZIONE XXVIII — *TEOREMA*.

51. *Se due angoli diedri* MCDN, mcdn *sono uguali, gli angoli piani corrispondenti*, AOB, aob *saranno ancora uguali* (fig. 17).

Dim. Si applichi l'angolo diedro *mcdn* sull'angolo diedro MCDN in modo che gli spigoli *cd*, CD coincidano, come pure le facce *md*, MD, e che il punto *o* cada sul punto O, il lato *oa* cadérà sul lato OA, perchè sono retti gli angoli *doa*, DOA. Parimente la faccia *cn* dovrà combaciare colla faccia CN, e però il lato *ob* caderà sul lato OB; dunque il piano *aob* combacerà col piano AOB, e l'angolo *aob* sarà uguale all'angolo AOB.

52. *Scolio.* La reciproca di questa proposizione è così manifesta che non occorre dimostrarla.

PROPOSIZIONE XXIX — *PROBLEMA*.

53. *Se un piano* BK *è perpendicolare ad un altro* MN, *ogni retta* AP *condotta perpendicolarmente alla intersezione comune* BC *nel piano* BK *sarà perpendicolare al piano* MN (*fig. 18*).

Dim. Nel piano MN si tiri DE, perpendicolare a BC. Essendo per ipotesi uguali gli angoli diedri che il piano BK forma col piano MN, gli angoli piani corrispondenti APD, APE saranno ancora uguali (n° 51). Quindi la retta AP sarà perpendicolare alle due rette BC, DE che passano pel suo piede P nel piano MN, e però sarà perpendicolare a questo medesimo piano.

PROPOSIZIOE XXX — *TEOREMA*

54. *Se una retta* AP *è perpendicolare ad un piano* MN, *ogni piano* BK *che passa per questa retta sarà parpendicolare al medesimo piano* (fig. 18).

Dim. Pel punto P si conduca nel piano MN la retta DE perpendicolare alla intersezione comune BC dei due piani. Essendo per ipotesi AP perpendicolare al piano MN, gli angoli APD, APE saranno retti, e perciò uguali; ma questi sono gli angoli piani corrispondenti agli angoli diedri adiacenti che il piano BK forma col piano MN, dunque il piano BK è perpendicolare al piano MN (n° 50).

PROPOSIZIONE XXXI — *TEOREMA*.

55. *Se due piani* BG, DF, *che s' intersegano, sono perpendicolari ad un piano* MN, *la loro comune intersezione* AP *sarà perpendicolare al medesimo piano* (fig. 19).

Dim. Imperocchè, se AP non è perpendicolare al piano MN, non potrà essere neppure perpendicolare alle due rette, BC, DE che passano pel suo piede P nel piano MN; quindi nel piano BG, si potrebbe condurre dal punto P una perpendicolare BC, e nel piano DF una perpendicolare a DE. Ma ciascuna di queste perpendicolari dovrebb' essere perpendicolare al piano MN (n° 53); il che è assurdo (n° 14), dunque AP è perpendicolare al piano MN.

PROPOSIZIONE XXXII — *TEOREMA*.

56. *Due angoli diedri qualunque stanno come i loro angoli piani corrispondenti* (fig. 17).

Dim. Sieno MCDN, *mcdn* due angoli diedri qualunque, ed AOB *aob* i loro angoli piani corrispondenti.

Nel piano AOB si descriva con centro in O, e con un raggio ad arbitrio l' arco di circolo AB; lo stesso si faccia nel piano *aob*, prendendo per raggio $oa = OA$.

Ciò premesso, si supponga in primo luogo che gli archi AB, *ab* sieno commensurabili, e che la loro comune misura sia contenuta *m* volte nell'arco AB, e *n* volte nell'arco *ab*. Si divida l'arco AB in *m* parti uguali, portando la comune misura sopra di esso, e l'arco *ab* in *n* parti uguali, indi si congiungano i punti di divisione col centro O, e col centro *o*, le rette congiungenti saranno raggi che divideranno l'angolo AOB in *m* parti uguali, e l'angolo *aob* in *n* parti uguali. Or se per tutti questi raggi, e per gli spigoli DC, *dc* si facciano passare i piani che vengono determinati dall'incontro dei raggi con gli spigoli medesimi, l'angolo diedro MCDN sarà diviso in *m* angoli diedri uguali, e l'angolo diedro *mcdn* in *n* angoli diedri uguali, perchè i loro angoli piani corrispondenti sono uguali fra loro. Laonde risulta manifesto che gli angoli diedri proposti stanno come i loro angoli piani corrispondenti.

La stessa proporzione sussiste ancora quando gli archi AB, *ab* non sono commensurabili, e ciò si dimostra applicando a questo caso il ragionamento fatto per un caso analogo nella geometria piana (n° 205); dunque gli angoli diedri stanno come i loro angoli piani corrispondenti.

57. *Scolio.* Questa proposizione si enuncia ancora dicendo che: *Un angolo diedro qualunque ha per misura l' angolo piano corrispondente, ovvero l' arco di circolo che serve di misura all' angolo piano medesimo.*

Infatti, se si prenda per unità di misura degli angoli diedri *l'angolo diedro retto*, da quanto qui sopra si è dimostrato ne consegue che *un angolo diedro qualunque sta all' angolo diedro retto come l' angolo piano corrispondente al primo sta all' angolo piano corrispondente al secondo, cioè all' angolo retto.*

Quindi il rapporto di un angolo diedro qualunque alla sua unità di misura è uguale al rapporto dell'angolo piano corrispondente alla sua unità; il che equivale a dire che un angolo diedro qualunque ha per misura l'angolo piano corrispondente.

PROPOSIZIONE XXXIII — *TEOREMA.*

58. *Se per un punto* B *dello spigolo* OE *di un angolo diedro* DOEF *si conducano le rette* BP, BQ *respettivamente perpendicolari alle facce* OD, OF, *l'angolo* PBQ *formato da queste perpendicolari sarà il supplemento dell'angolo* ABC *che misura l'angolo diedro* (fig. 20).

Dim. La retta BP essendo perpendicolare al piano OD, sarà perpendicolare alla retta OE, che passa pel suo piede in questo piano. Parimente la retta BQ sarà perpendicolare ad OE. Da un altra parte le rette BA, BC sono ancora perpendicolari ad OE per ipotesi, dunque le quattro rette BA, BP, BQ, BC sono situate nel piano che sarebbe prodotto dal rivolgimento dell'angolo retto EBA intorno al lato EB supposto immobile (n° 14); e perciò la somma de'quattro angoli, ABC, ABP, PBQ, QBC equivale a quattro angoli retti; ma gli angoli ABP, e QBC sono retti, dunque gli altri due presi insieme sono uguali a due retti, e per conseguenza l'angolo PBQ è il supplemento dell'angolo ABC che misura l'angolo diedro proposto.

CAPITOLO VII.

DEGLI ANGOLI SOLIDI.

59. *Definizione* I. Se più piani si tagliano a due a due e si riuniscono tutti in un medesimo punto, lo spazio angolare da essi compreso dicesi *angolo solido, o angolo poliedro.*

60. Questa definizione è sufficiente a dare un idea chiara dell'angolo solido; dappoichè l'angolo sia piano, sia solido non può definirsi, rigorosamente parlando, essendo impossibile definire esattamente in che consiste la inclinazione di due rette che s'incontrano in un medesimo piano senza formare una sola linea, o quella che risulta da tre, o più rette, le quali sono situate in piani differenti, e concorrono in un medesimo punto. Del resto, come già osservammo parlando dell'angolo piano, una definizione esatta dell' angolo solido non è necessaria; poichè si può conoscere l' uguaglianza di

due angoli solidi sovrapponendo l'uno all'altro, e ciò basta per fondare l'esatta teorica di detti angoli.

61. *Definizione* II. Il punto d'incontro dei piani che formano l'angolo solido chiamasi *vertice* dell'angolo stesso; e le intersezioni dei piani medesimi si dicono *spigoli* o *costole* dell'angolo solido.

62. *Definizione* III. L'angolo solido prende il suo nome particolare dal numero dei piani che lo costituiscono; così (fig. 21) l'angolo formato in S dai tre piani SAB, SAC, SBC si dice *angolo solido triedro*, o più semplicemente *angolo triedro*; quello formato da quattro piani chiamasi *angolo solido tetraedro*, o *angolo tetraedro* ecc.

63. *Definizione* IV. In qualunque angolo solido si distinguono gli *angoli piani rettilinei* formati dagli spigoli in ciascuna faccia, come sarebbero (fig. 21) gli angoli BSA, BSC, ASC, e gli angoli diedri delle facce o piani successivi che costituiscono l'angolo solido medesimo.

64. Per indicare nn angolo solido si enuncia la lettera del vertice ponendo di seguito tutte le altre lettere respettivamente situate sopra i suoi spigoli: così si dice (fig. 21) *l'angolo solido* SABC. Talvolta si adopera la sola lettera del vertice, dicendosi *l'angolo solido* S.

65. *Definizione* V. L'angolo solido si dirà *convesso* quando il piano di ciascuna faccia prolungato non taglia l'angolo medesimo, vale a dire quando tutti i suoi angoli diedri sono *salienti*. Tale è l'angolo solido SABC (fig. 21), in cui niuno spigolo *è rientrante*. E qui giova osservare che negli elementi di geometria si considerano i soli angoli solidi convessi.

PROPOSIZIONE XXIV — *TEOREMA*.

66. *In ogni angolo triedro uno qualunque dei suoi tre angoli piani è minore della somma degli altri due* (fig. 21).

Dim. Sia SABC un angolo triedro, e sia ASB il maggiore dei tre angoli piani ASB, ASC, CSB. Nel piano BSA si faccia l'angolo ASD uguale all'angolo ASC, indi nel medesimo piano si conduca una retta AB che incontri le rette SA, SD, SB; si prenda SC = SD e si tirino le rette AC, BC. I triangoli ASD, ASC sono uguali, perchè hanno un angolo uguale compreso fra lati respettivamente uguali, onde si avrà AD = AC. Or nel triangolo ABC il lato AB è minore della somma dei lati AC, CB, dunque togliendo da una parte AD, e dall'altra la sua uguale AC, resterà DB minore di BC. Quindi i due triangoli SBC, SBD, avranno il lato SB comune, ed il terzo lato BC del primo maggiore del terzo lato BD del secondo, e però sarà l'angolo BSC maggiore dell'angolo BSD: aggiungendo da una parte l'angolo ASD, e dall'altra il suo uguale ASC, risulta l'angolo ASB minore della somma degli angoli ASC, BSC.

PROPOSIZIONE XXXV — *TEOREMA*.

67. *In ogni angolo solido la somma degli angoli piani è minore di quattro angoli retti* (fig. 22).

Dim. Sia S un angolo solido; si conduca un piano che incontri tutti i suoi spigoli: le intersezioni di questo piano colle facce dell'angolo solido formeranno il poligono ABCDE. Da un punto O preso dentro questo poligono si tirino le rette OA, OB, OC, OD, OE; vi saranno intorno al punto O tanti triangoli quanti sono quelli intorno al punto S; per conseguenza la somma di tutti gli angoli dei primi triangoli è uguale alla somma di tutti gli angoli dei secondi. Or nell'angolo triedro A formato dai tre piani EAB, EAS, BAS. l'angolo piano EAB è minore della somma degli altri due: e similmente l'angolo piano ABC è minore degli angoli ABS, CBS, e così di tutti gli angoli del poligono ABCDE, dunque la somma degli angoli che stanno alle basi dei triangoli aventi il vertice comune O è minore della somma degli angoli alle basi dei triangoli che hanno il vertice comune S. Laonde per compensazione la somma degli angoli formati intorno al punto O dev'essere maggiore della somma degli angoli fatti intorno al punto S. Ma la prima somma è uguale a quattro angoli retti, dunque la seconda è minore di quattro retti.

PROPOSIZIONE XXXVI — *TEOREMA*.

68. *Se pel vertice di un angolo triedro si conducano tre piani respettivamente perpendicolari ai suoi spigoli, si formerà un altro angolo triedro, in guisa che gli angoli piani del primo saranno i supplementi degli angoli diedri del secondo, e reciprocamente* (fig. 23).

Dim. Sia SABD un angolo triedro: pel punto S si conduca il piano aSb perpendicolare allo spigolo SD, il piano aSd perpendicolare allo spigolo SB, ed il piano bSd perpendicolare allo spigolo SA. Questi tre piani determineranno un secondo angolo triedro $Sabd$, in modo che gli angoli piani ASB, ASD, BSD saranno i supplementi degli angoli che misurano gli angoli diedri Sd, Sb, Sa.

Infatti, essendo per costruzione lo spigolo SD perpendicolare al piano aSb, sarà pure perpendicolare alle rette Sa, Sb che passano pel suo piede in questo piano. Parimente lo spigolo SB essendo perpendicolare al piano aSd, sarà ancora perpendicolare alle rette Sa, Sd che passano pel suo piede in questo piano. Quindi la retta Sa è perpendicolare a un tempo agli spigoli SD, SB, e perciò al piano DSB che contiene questi due spigoli. Nello stesso modo si dimostrerà che Sb è perpendicolare al piano ASD, e che Sd è perpendicolare al piano ASB. Dunque gli angoli triedri SABD, $Sabd$ son tali che gli spigoli dell'uno sono perpendicolari ai piani dell'altro, e viceversa.

Ciò premesso, da quanto si è dimostrato (n° 58) si desume che l'angolo ASB formato dalle rette SA, SB, rispettivamente perpendicolari ai piani *bSd*, *aSd*, è supplemento dell'angolo diedro *aSdb* compreso da questi piani; e reciprocamente l'angolo *aSb* formato dalle rette *Sa*, *Sb* rispettivamente perpendicolari ai piani SDB, SAD sarà supplemento dell'angolo diedro ASDB. Lo stesso dicasi degli altri angoli piani, e degli angoli diedri corrispondenti nei due angoli solidi.

69. *Scolio.* La proprietà, di cui godono gli angoli triedri SABD, *Sabd*, ha fatto dare ad essi il nome di *angoli triedri supplimentarj*.

PROPOSIZIONE XXXVII — *TEOREMA*

70. *Se due angoli triedri hanno gli angoli piani respettivamente uguali, gli angoli diedri formati dai piani di questi angoli saranno essi pure uguali* (fig. 24).

Dim. Sieno S, *s* i due angoli triedri; e si supponga che gli angoli piani dinotati dalle stesse lettere sieno respettivamente uguali, cioè ASB = *asb*, ASC = *asc*. BSC = *bsc*.

Per un punto E dello spigolo SB s'innalzino a questo spigolo nelle facce ASB, e CSB le perpendicolari EM. EN, l'angolo MEN formato da queste perpendicolari sarà la misura dell'angolo diedro ASBC (n° 57). Si prenda poi sul prolungamento di SE un punto B ad arbitrio, e sopra SA un punto A in modo che la retta BA incontri EM in un punto M situato fra B ed A (*). Similmente si prenderà sopra SC un punto C tale che la retta BC incontri EN in un punto N situato fra B e C. Finalmente si condurranno le rette AC. MN.

Ciò premesso, si ripeta nel triedro *s* la costruzione precedente prendendo *se* = SE, e *sb* = SB, l'angolo *men* sarà la misura dell'angolo diedro *asbc*, e sarà uguale all'angolo MEN.

Infatti, essendo i lati SA, SB rispettivamente eguali ai lati *sa*, *sb*, e l'angolo ASB = *asb*, sarà il triangolo ASB uguale al triangolo *asb*; e perciò risulta il lato AB = *ab*. Similmente si dimostra che il triangolo SBC è uguale a *sbc*, ed il triangolo ASC ad *asc*, onde sarà BC = *bc*, ed AC = *ac*. Quindi saranno eguali anche i triangoli ABC, ed *abc*. Da un'altra parte il triangolo MBE è uguale al triangolo *mbe*; poichè il lato BE = *be*, e gli angoli adiacenti a questi lati sono respettivamente uguali, onde sarà il lato BM = *bm* ed EM = *em* Similmente si dimostra che BN = *bn*, ed EN = *en*; e perciò il triangolo MNB è uguale al triangolo *mnb*, perchè l'angolo MBN compreso fra i lati BM, NB è uguale all'angolo *mbn*

(*) Ciò è sempre possibile. Infatti, se EM non incontra SA, la cosa è manifesta; se poi l'incontra, allora si prenderà il punto A al disopra del punto d'incontro.

compreso fra i lati *bm*, *bn* in virtù della uguaglianza dei triangoli ABC, *abc*. Quindi sarà il lato MN = *mn* ed il triangolo MNE risulterà equilatero al triangolo *mne*. e però infine sarà l'angolo MEN uguale all'angolo *men*. Dunque gli angoli diedri SB, *sb* sono uguali, e nello stesso modo si potrà dimostrare che l'angolo diedro SA= *sa*, e SC = *sc*.

71. *Scolio*. Nella dimostrazione precedente gli angoli piani dei due angoli solidi si sono considerati come simi mente disposti, ma il teorema avrebbe luogo anche quando gli angoli piani accennati fossero disposti in ordine inverso, come negli angoli solidi SABC, S′A′B′C′, dove si ha l'angolo piano ASC = A′S′C′, ASB = A′S′B′ e BSC = B′S′C′. Infatti, se sopra gli spigoli si prendano le parti SA, SB, SC, rispettivamente eguali alle parti SA′, SB′, SC′; indi si faccia S′E′ = SE. e si ripeta sull'angolo solido S′la costruzione fatta nell'angolo solido S, si dimostrerà come sopra che l'angolo M′E′N′ = MEN.

PROPOSIZIONE XXXVIII = *TEOREMA*.

72. *Due angoli triedri, composti di angoli piani rispettivamente uguali e similmente disposti sono uguali fra loro* (fig. 24).

Dim. Negli angoli triedri S, *s* sia l'angolo ASC = *asc*, ASB = *asb*, e BSC = *bsc*, sarà facile dimostrare che questi due angoli triedri sono uguali fra loro. Infatti, se l'angolo *asc* si sovrapponga al suo uguale ASC, l'angolo *asb* dovrà coincidere col suo uguale ASB. poichè l'angolo diedro *sa* è uguale all'angolo diedro SA. Quindi i due angoli solidi coincideranno. e perciò saranno uguali fra loro.

73. *Scolio*. Quando gli angoli piani di due angoli triedri S, S′, sono uguali rispettivamente, ma disposti in ordine inverso, non si può dimostrare la loro uguaglianza col principio della sovrapposizione. Perocchè, se si fa coincidere l'angolo A′S′C′ col suo uguale ASC in modo che lo spigolo S′A′ cada sopra SA. e S′C′ sopra SC, lo spigolo SB si troverà sul davanti del piano comune ASC, mentre lo spigolo S′B′ sarà situato dietro lo stesso piano; e però i due angoli solidi non combaceranno, ma si troveranno situati come nella fig. 26.

Che se poi (fig. 24) per far cadere lo spigolo S′B′ davanti il piano ASC si sovrapponga lo spigolo S′C′ allo spigolo SA. e S′A′ a SC, in tal caso neppure può succedere la coincidenza dei due angoli solidi; poichè l'angolo diedro S′C′ non è eguale all'angolo diedro SA, ed oltrecciò l'angolo piano C′S′B′ non è uguale all'angolo ASB.

I due angoli solidi si troveranno in questo secondo caso disposti come gli angoli SABC, SAB″C della figura.

Dunque in ogni caso non si può dimostrare la uguaglianza degli angoli triedri S, S′ colla sovrapposizione, ma bisogna ricavarla dalla uguaglianza dei loro elementi costituenti, non essendovi alcuna ragione perchè essi debbano differire l'uno dall'altro.

Infatti, sono composti degli stessi angoli piani, e degli stessi angoli diedri, la loro differenza consiste in una semplice trasposizione di parti, essendo gli angoli piani dell'uno disposti in ordine inverso agli angoli piani dell'altro.

Legendre, che fu primo a fare queste importanti osservazioni, ha chiamati *uguali per simmetria*, o più semplicemente *simmetrici* gli angoli triedri, di cui è parola, perchè li considera come costituiti rispetto ad un medesimo piano l'uno da una parte, e l'altro dalla parte opposta, siccome si vede nella fig. 26.

Da tutto ciò segue che due angoli triedri si potranno chiamare *simmetrici* quando sono composti di angoli piani rispettivamente uguali e disposti in ordine inverso.

Nelle figure piane non vi può essere uguaglianza per simmetria, poichè si può rovesciare una figura piana, e prendere indifferentemente il di sopra per il di sotto; il che non può farsi nelle figure solide.

PROPOSIZIONE XXXIX — *PROBLEMA*

74. *Costruire un angolo triedro simmetrico ad un angolo triedro dato* (fig. 25).

Sol. Sia SABC l'angolo solido dato. Si prolunghino gli spigoli AS, BS, CS al di là del vertice S: l'angolo SA'B'C' sarà il simmetrico di SABC. Infatti, gli angoli piani dei due triedri sono uguali ciascuno a ciascuno come opposti al vertice, ma sono disposti in ordine inverso, come è facile dimostrare. Imperciocchè, se si applica lo spigolo SA' sopra SA, e SC' sopra SC, lo spigolo SB' non potrà cadere sopra lo spigolo SB, perchè rispetto al piano comune ASC, lo spigolo SB si troverà davanti questo piano, e lo spigolo SB' dietro il piano medesimo. Che se si applichi lo spigolo SC' sopra SA, e SA' sopra SC, lo spigolo SB' cadrà davanti il piano ASC, ma non potrà coincidere collo spigolo SB, poichè l'angolo C'SB' non è uguale all'angolo ASB, ma bensì al suo verticale CSB. Dunque i due triedri SABC, SA'B'C' sono simmetrici.

75. *Scolio.* Merita di essere osservato che se un angolo triedro *sabc* situato comunque (fig. 26) si compone di angoli piani uguali rispettivamente a quelli dell'angolo triedro SABC; il primo potrà coincidere sia con SABC, sia col suo simmetrico SAB'C. Infatti, se si suppone che gli angoli piani dinotati dall'una e dall'altra parte colle stesse lettere siano uguali fra loro, e si ponga lo spigolo *sa* sopra SA, e lo spigolo *sc* sopra SC, ne risulta che essendo l'angolo diedro $csab = CSAB = CSAB'$, l'angolo piano *bsa* dovrà coincidere o coll'angolo piano BSA, o coll'angolo piano B'SA secondo che lo spigolo *sb* cadrà davanti al piano ASC, o dietro questo medesimo piano. Quindi l'angolo triedro *sabc* coinciderà sia coll'angolo triedro SABC, sia coll'angolo triedro SAB'C.

76. *Corollario.* Dallo scolio precedente si deduce che *con tre*

angoli piani dati si possono al più formare due angoli triedri, simmetrici l' uno dell' altro; o in altri termini che un angolo triedro non può avere che un solo simmetrico.

PROPOSIZIONE XL — *TEOREMA.*

77. *Due angoli triedri che hanno gli angoli diedri uguali ciascuno a ciascuno sono uguali, o simmetrici* (fig. 24).

Dim. Negli angoli triedri SABC, *sabc* sia l'angolo diedro SA=*sa*, SB = *sb*, SC = *sc*; e si supponga che si siano costruiti gli angoli triedri supplementarj (n° 68). Poichè nei due angoli solidi proposti gli angoli diedri sono uguali ciascuno a ciascuno, ne segue che gli angoli solidi supplementarj avranno gli angoli piani uguali ciascuno a ciascuno, e per conseguenza questi angoli solidi supplementarj avranno ancora i loro angoli diedri uguali ciascuno a ciascuno. Ma gli angoli diedri degli angoli solidi supplementarj sono supplementi dei corrispondenti angoli piani degli angoli solidi proposti, dunque gli angoli solidi proposti dovranno avere gli angoli piani uguali ciascuno a ciascuno, e però saranno o uguali, o simmetrici.

PROPOSIZIONE XLI — *TEOREMA*

78. *Due angoli triedri che hanno un angolo diedro uguale compreso fra due angoli piani uguali ciascono a ciascuno, sono uguali o simmetrici* (fig. 24).

Dim. Negli angoli triedri S, *s* sia l' angolo diedro SB=*sb*, e gli angoli piani ASB, CSB rispettivamente uguali agli angoli piani *asb*, *csb*, è manifesto che se questi angoli piani sono disposti nello stesso ordine, i due angoli solidi possono coincidere. Ma se gli angoli piani sono disposti in ordine inverso, allora l'uno degli angoli solidi potrà coincidere col simmetrico dell altro, e perciò saranno simmetrici.

PROPOSIZIONE XLII — *TEOREMA.*

79. *Due angoli triedri che hanno un angolo piano adiacente a due angoli diedri uguali ciascuno a ciascuno, sono uguali, o simmetrici* (fig. 24).

Dim. Negli angoli triedri S, *s* sia l' angolo piano ASC= *asc*, l'angolo diedro SA = *sa*, e l' angolo diedro SC = *sc*. È evidente che se gli angoli diedri accennati sono disposti nello stesso ordine, i due angoli solidi potranno coincidere, allorchè si sovrappongano l'uno all'altro. Ma se gli angoli diedri sono disposti in ordine inverso, allora uno degli angoli solidi proposti potrà coincidere col simmetrico dell'altro, e però saranno uguali nel primo caso, e simmetrici nel secondo.

80. *Scolio* I. Con i teoremi precedenti si possono stabilire le condizioni, che determinano gli angoli solidi poliedri.

Supponiamo che l' angolo solido S (fig. 26) sia formato da quattro angoli piani ASB, BSC, CSB', B'SA. La conoscenza di questi angoli non basta per determinare l'angolo solido; perocchè con gli stessi angoli piani si potrebbero formare infiniti angoli solidi. Infatti, se per gli spigoli SA, SC si faccia passare il piano ASC. l'angolo solido S sarà scomposto in due angoli triedri SABC, SAB'C. Or la conoscenza de due angoli piani ASB, BSC non basta per determinare l'angolo triedro SABC, ma vi bisogna quella del terzo angolo piano ASC, e lo stesso accade per l' angolo triedro SAB'C, che non resta determinato dalla sola conoscenza de' due angoli piani CSB', e B'SA. Quindi è manifesto che con quattro angoli piani si potranno formare tanti angoli solidi diversi quanti saranno i valori diversi che si potranno dare all'angolo ASC. Ma se alla conoscenza dei quattro angoli piani si aggiunga quella dell'angolo diedro SB, allora l'angolo solido triedro SABC sarà totalmente determinato; e per conseguenza trovandosi in tal caso determinato il terzo angolo piano ASC, anche l'altro angolo solido triedro SAB'C sarà determinato, e però lo sarà pure l'angolo solido S.

Si vede ora facilmente che per determinare un angolo solido formato da cinque angoli piani, non basta conoscere questi angoli, ma vi bisogna ancora la conoscenza di due angoli diedri: converrebbe conoscere tre angoli diedri, ed i sei angoli piani nell'angolo solido formato da questi angoli. e così in progresso.

Dalle cose precedenti si deduce che

Due angoli solidi sono eguali fra loro, quando sono composti di un medesimo numero di angoli piani rispettivamente uguali e disposti nello stesso ordine; e di più un angolo diedro del primo sia eguale all' angolo diedro omologo del secondo se gli angoli solidi sono tetraedri, due angoli diedri del primo siano eguali agli angoli diedri omologhi del secondo, se gli angoli solidi sono pentaedri, e così di seguito.

81. *Scolio* II. Ciò che abbiam detto intorno agli angoli triedri simmetrici si può applicare anche agli angoli solidi formati da più di tre angoli piani. Per esempio, un angolo solido formato dagli angoli piani A, B, C, D, E, ed un altro angolo solido formato dagli stessi angoli in un ordine inverso A, E, D, C. B, possono esser tali che i piani, ne' quali sono gli angoli eguali siano egualmente inclinati fra loro. In tal caso questi angoli solidi, che sarebbero eguali senza che la sovrapposizione sia possibile e si diranno *angoli solidi eguali per simmetria*, o semplicemente *angoli solidi simmetrici.*

Da questa definizione e dallo scolio precedente si possono dedurre le condizioni che determinano l' eguaglianza per simmetria degli angoli solidi tetraedri, pentaedri, esaedri, ecc...

LIBRO II.

DEI SOLIDI TERMINATI DA SUPERFICIE PIANE.

CAPITOLO PRIMO

DEI POLIEDRI IN GENERALE.

Nozioni e definizioni preliminari

82. Per formare un angolo solido vi vogliono almeno tre piani che si riuniscono in un solo e medesimo punto; ma per limitare lo spazio da per ogni dove vi bisogna un quarto piano che limiti lo spazio indefinito compreso fra le tre facce dell' angolo accennato. Quindi la più semplice delle figure solide terminate da piani è il *tetraedro* o solido a quattro facce; viene in seguito il *pentaedro*, o solido a cinque facce, l' *esaedro* che ne ha sei, l' *ottaedro* che ne ha otto, il *dodecaedro*, dodici, l' *icosaedro*, venti. In generale si dà il nome di *poliedro* ad ogni solido terminato da facce piane.

83. Le facce de' poliedri essendo poligoni, le intersezioni di questi poligoni si chiamano *lati*, *spigoli*, *o costole* del poliedro.

84. La *diagonale* di un poliedro è una linea retta che uuisce due vertici non situati sulla medesima faccia.

85. Un poliedro si dice *convesso* quando la sua suprficie non può essere incontrata da una linea retta in più di due punti. Di questa sola specie di poliedri si parla negli elementi; mettendo da parte quelli che hanno gli angoli solidi rientranti.

86. Dicesi *piramide* (fig. 22) un solido compreso fra più piani triangolari che partono da un medesimo punto S, e terminano ai differenti lati di un poligono ABCDE.

87. La piramide si può concepire come prodotta dal movimento di una linea retta indefinita, fissa in un punto S. ed obbligata a percorrere il perimetro di un poligono qualunque ABCDE.

88. Il punto S dicesi *vertice* della piramide, il poligono ABCDE ne è la *base*, e la perpendicolare abbassata dal vertice sul piano della *base* ne è l' *altezza*. Finalmente il complesso dei triangoli ASB, BSC, CSD, ecc. forma la *superficie convessa* o *laterale* della piramide.

89. La piramide dicesi *triangolare*, *quadrangolare*, ecc., secondochè la base è un triangolo, un quadrilatero, ecc.

90. Una piramide chiamasi *regolare* quando la sua base è un poligono regolare, e la sua altezza cade sul centro della base medesima. In questo caso l' altezza prende il nome di *asse* della piramide, e si appella *apotema* la perpendicolare abbassata dal vertice della piramide sopra un lato della sua base.

91. Sotto il nome di *piramide retta* intenderemo quella, in cui l' altezza non cade fuori della base. Chiameremo poi *piramide obliqua* quella, in cui l' altezza cade fuori della base.

92. Il *prisma* (fig. 29) è un solido compreso da più piani parallelogrammi terminati da una parte, e dall' altra da due poligoni uguali e paralleli, che si chiamano *basi* del prisma. Il complesso dei parallelogrammi accennati forma la *superficie convessa* o *laterale* del prisma.

93. Si può concepire il prisma come generato dal movimento di una retta AF che si mantiene parallela a se stessa e di costante lunghezza, mentre descrive colla sua estremità A il perimetro di un poligono qualunque ABCDE. Con questo medesimo movimento l'altra estremità F descrive il perimetro del poligono FGKIK uguale e parallelo al poligono ABCDE.

94. L' *altezza* di un prisma è la distanza delle sue due basi cioè la perpendicolare abbassata da un punto della base superiore sopra il piano della base inferiore.

95. Il prisma prende il nome di *triangolare*, *quadrangolare*, ecc. secondochè le sue basi sono triangoli, quadrilateri, ecc.

96. Un prisma dicesi *retto* quando i lati della superficie convessa sono perpendicolari alle basi. In questo caso i lati medesimi sono uguali all' altezza, ed i parallelogrammi, che formano la superficie convessa, sono rettangoli. Per lo contrario il prisma è *obliquo* allorchè i lati sono obliqui alle basi, nel qual caso essi lati sono maggiori dell' altezza.

97. Dicesi *parallelepipedo* il prisma, in cui le basi sono due parallelogrammi. Quindi il parallelepipedo è un solido compreso da sei facce parallelogrammiche (fig. 30).

98. Il parallelepipedo essendo un prisma, potrà essere per conseguenza *retto* o *obliquo*. Nel parallelepipedo retto quando la base è un rettangolo, tutte le facce sono rettangolari; e perciò si chiama *parallelepipedo rettangolo*. Finalmente tra i parallelepipedi rettangoli si distingue il *cubo*, che è un solido compreso da sei quadrati uguali.

99. Nella teorica dei poliedri si distinguono particolarmente le piramidi, ed i prismi, perchè sopra questi solidi tutta quella teorica viene appoggiata.

PROPOSIZIONE XLIII — *TEOREMA*.

100. *Se una piramide è tagliata da un piano parallelo alla ba-*

se, l' altezza, ed i lati saranno divisi in parti proporzionali ; e la sezione sarà un poligono simile alla base (fig. 28).

Dim. Sia la piramide SABCD tagliata da un piano *abcd* parallelo alla base; sia SO l' altezza della piramide , e si conducano le rette *ao*, AO.

1.° Le intersezioni *ab*, AB dei piani *abcd*. ABCD col piano SAB essendo parallele (n° 33), sarà il triangolo S*ab* simile al triangolo SAB. Nello stesso modo si dimostra che il triangolo S*bc* è simile al triangolo SBC, il triangolo S*cd* al triangolo SCD , ecc. per conseguenza la ragione di S*a*: SA sarà uguale a quella di S*b*: SB, di S*c*: SC, ecc. Ma da un' altra parte la ragione di S*a*: SA è uguale a quella dell' altezza So all' altezza SO . poichè *ao* è parallela ad AO, dunque i lati SA, SB, SC, ecc., e l' altezza SO della piramide sono divisi in parti proporzionali.

2.° Per la simiglianza degli stessi triangoli si ha *ab* : AB :: S*b* : SB :: *bc*: BC, dunque *ab* : AB :: *bc* : BC , e così pure si dimostra che *bc* : BC :: *cd* : CD , ecc. Quindi i poligoni *abcd* , ABCD hanno i lati proporzionali; hanno di più gli angoli rispettivamente uguali $a = A$, $b = B$, ecc. , perchè sono compresi fra lati paralleli e rivolti nella stessa direzione, dunque il poligono *abcd* è simile al poligono ABCD.

PROPOSIZIONE XLIV — *TEOREMA*.

101. *Le basi di due piramidi, che hanno la medesima altezza, stanno fra loro come le sezioni fatte da piani condotti nelle due piramidi parallelamente ad esse basi , ed ad uguale distanza dai vertici* (fig. 28).

Dim. Sieno due piramidi S , e T , che abbiano le altezze uguali SO, TQ. Si faccia T*q* = So, e pel punto *q* si conduca un piano parallelo alla base MNP , la sezione *mnp* sarà simile a questa base (n° 100). Parimente se pel punto *o* si conduca un piano parallelo alla base ABCD , la sezione *abcd* sarà simile a questa base. Or essendo simili i poligoni ABCD , *abcd* , le loro aje staranno come i quadrati dei lati omologhi AB, *ab*, ovvero come i quadrati delle altezze SO, *so* (n° 100). Nello stesso modo si dimostra che i poligoni MNP, *mnp* stanno come i quadrati delle altezze TQ, T*q*, ovvero come i quadrati di SO, *so*, dunque in fine si avrà

ABCD : MNP :: *abcd* : *mnp*.

102. *Corollario*. Da ciò segue che se le basi ABCD, MNP delle due piramidi sono equivalenti, le sezioni *abcd*, *mnp* fatte ad uguale altezza nelle stesse piramidi saranno equivalenti, e reciprocamente.

PROPOSIZIONE XLV — *TEOREMA*.

103. *Una piramide qualunque si può decomporre in piramidi triangolari* (fig. 26).

Dim. Sia, per esempio, la piramide quadrangolare SABCD'. Si tiri la diagonale AC nella base della piramide, indi pel vertice S e per la diagonale medesima si faccia passare il piano ASC, è manifesto che questo piano dividerà la piramide proposta in due piramidi triangolari. Nello stesso modo, cioè tirando due diagonali nella base di una piramide pentagonale, si potrà divider questa in tre piramidi triangolari, e così in progresso.

PROPOSIZIONE XLVI — *TEOREMA.*

104. *Qualunque sezione fatta in un prisma da un piano parallelo alla base è uguale a questa base.* (fig. 29).

Dim. Si tagli il prisma *abck* con un piano parallelo alla base. il poligono *lmnpq* che ne risulta sarà uguale al poligono *abcde*. Infatti, le rette *lm*. *ab* sono uguali come parallele comprese fra parallele, e così pure si dimostra che *mn* è uguale e parallela a *bc*, *np* a *cd* ec. Quindi i due poligoni avranno i lati uguali rispettivamente, ed anche gli angoli eguali, perchè compresi fra lati paralleli, e rivolti dalla stessa parte: e perciò sarà il poligono *lmnpq* uguale al poligono *abcde*.

105. *Corollario.* In qualunque prisma le sezioni fatte da piani paralleli fra loro sono uguali; dappoichè una di queste sezioni si può considerare come base di un prisma cui è parallela l' altra sezione.

106. *Scolio.* Ogni prisma poligono si può sempre decomporre in prismi triangolari, i quali hanno la medesima altezza del prisma, e le basi sono i differenti triangoli ABC, ACD, ADE, ecc., ne' quali si può decomporre la base ABCDE per mezzo delle diagonali AC, AD.

PROPOSIZIONE XLVII — *TEOREMA.*

107. *In ogni parallelepipedo le facce opposte sono uguali e parallele, e gli angoli triedri opposti sono simmetrici* (fig. 30).

Dim. Sieno ABCD, EGFH le basi del parallelepipedo proposto, le quali (n° 97) sono parallelogrammi eguali situati in piani paralleli. Or dico che due facce opposte qualunque AE, DG sono pure uguali e parallele. Perocchè, essendo ABCD un parallelogrammo, la retta AB è uguale e parallela a CD; parimente essendo EBCG un parallelogrammo, la retta BE è uguale e parallela a CG. Quindi gli angoli ABE, DCG hanno i lati paralleli e rivolti dalla stessa parte: perciò sono uguali, ed i loro piani sono paralleli (n° 42). Ma un parallelogrammo è determinato quando si conoscono due lati adiacenti e l'angolo da essi compreso, dunque il parallelogrammo AE è uguale a DG.

In secondo luogo, gli angoli triedri opposti come B, e F, sono simmetrici. Infatti, si prolunghi lo spigolo DF verso O, lo spigolo HF verso M, ed infine GF verso N. Nascerà un nuovo angolo solido triedro FOMN simmetrico all angolo solido FGHD (n° 74); ma eguale all'angolo solido B, perchè essendo FO parallela a BE, FM a BC, e FN ad AB, gli angoli piani che formano l'angolo solido FMNO saranno rispettivamente eguali agli angoli piani che compongono l'angolo solido B, e di più saranno similmente situati. Quindi resta dimostrato che l'angolo solido B è simmetrico all'angolo solido opposto FHDG.

108. *Scolio*. Un prisma è determinato quando si conosce la base, e la retta generatrice; dunque un parallelepipedo sarà determinato allorchè si conoscerà uno dei suoi angoli triedri B, e le lunghezze de' lati AB, BE, BC.

PROPOSIZIONE XLVIII — *TEOREMA*.

109. *In ogni parallelepipedo le quattro diagonali si tagliano scambievolmente in due parti uguali nel medesimo punto* (fig. 31).

Dim. Per due lati opposti BF, DH si faccia passare un piano; la sezione sarà il parallelogrammo BFDH: per conseguenza le diagonali BH, FD si taglieranno scambievolmente in due parti uguali nel punto O. Or se per i lati opposti AD, FG si conduca un altro piano, la sezione ADFG sarà pure un parallelogrammo, e la diagonale AG dividerà in due parti uguali la diagonale FD; e però la diagonale AG dovrà passare pel punto O. Si dimostrerà lo stesso per la diagonale EC; dunque le quattro diagonali del parallelepipedo si tagliano scambievolmente in due parti uguali nel medesimo punto O.

110. *Scolio*. Il punto O si chiama *centro* del parallelepipedo.

È manifesto che le rette tirate dal punto O a tutti i vertici del parallelepipedo, lo dividono in piramidi che hanno per vertice comune il punto O, e per basi le facce del parallelepipedo medesimo. E siccome ogni piramide si può decomporre in piramidi triangolari (n° 103), così ogni parallelepipedo si potrà decomporre in piramidi triangolari. Parimente prendendo un punto nell'interno di un poliedro, si potrebbe decomporlo in piramidi triangolari; ma essendo siffatta scomposizione molto importante, ne indicheremo un'altra nel teorema qui appresso.

PROPOSIZIONE XLIX — *TEOREMA*.

111. *Un poliedro convesso può sempre decomporsi in piramidi triangolari* (fig. 32).

Dim. Sieno SAB, ABCD, CDE tre facce consecutive di un poliedro. Se per uno dei vertici S si conducano delle linee rette a tutti

gli altri, si determinerà una serie di piramidi SABCD, SDCE, ecc., che avranno per vertice comune il punto S, e per basi le differenti facce del poliedro, eccetto quelle che vanno a terminare al punto S. Il complesso di tutte queste piramidi formerà il poliedro medesimo: ma ogni piramide si può decomporre in piramidi triangolari, dunque ogni poliedro convesso può decomporsi in piramidi triangolari.

112. *Scolio.* Apparisce da questo teorema che siccome la teorica delle figure piane rettilinee si riduce a quella dei triangoli, così la teorica de poliedri dovrà ridursi a quella delle piramidi triangolari. Nondimeno quest' ultima non potrebbe farsi rigorosamente, senza ricorrere ad alcune proprietà dei prismi, ed ecco perchè nella geometria solida si parla in modo speciale delle piramidi, e dei prismi, ed in un modo generale degli altri poliedri.

CAPITOLO II.

DEI POLIEDRI UGUALI.

PROPOSIZIONE L — *TEOREMA.*

113. *Due piramidi triangolari sono uguali quando hanno tre facce rispettivamente uguali, e similmente disposte* (fig. 24).

Dim. Siano le due piramidi SABC, *sabc*, che abbiano le facce SBA, SBC, SCA rispettivamente uguali alle facce, *sba*, *sbc*, *sca*, e similmente disposte. Gli angoli triedri S. e *s* saranno uguali, perchè sono composti di angoli piani uguali ciascuno a ciascuno, e disposti nello stesso ordine (n° 72), per conseguenza gli angoli diedri SA, SB, SC saranno rispettivamente uguali agli angoli diedri *sa*, *sb*, *sc*. Quindi se si fanno coincidere gli angoli triedri accennati, risulterà manifesta la coincidenza delle due piramidi, che perciò saranno uguali.

114. *Corollario* Da questo teorma si deduce evidentemente che due piramidi triangolari sono uguali allorchè hanno tutti i lati rispettivamente uguali e similmente disposti.

PROPOSIZIONE LI — *TEOREMA.*

115. *Due piramidi triangolari sono uguali quando hanno un angolo diedro uguale, compreso fra due facce rispettivamente uguali e similmente disposte* (fig. 24).

Dim. Siano SABC, *sabc*, due piramidi triangolari, nelle quali sia l'angolo diedro SB uguale all' angolo diedro *sb*, e le facce SBA,

SBC, rispettivamente uguali alle facce *sba*, *sbc*, e similmente disposte. È chiaro che se si ponga la faccia *sba* sopra la sua uguale SBA, e l'angolo diedro *sb* sopra SB, la faccia *sbc* combacerà con la faccia SBC, e però risulta manifesta l'eguaglianza delle due piramidi.

PROPOSIZIONE LII — *TEOREMA*.

116. *Due piramidi triangolari sono uguali, quando hanno una faccia uguale adiacente a tre angoli diedri uguali ciascuno a ciascuno, e similmente disposti* (fig. 24).

Dim. Siano SABC, *sabc* due piramidi triangolari, che abbiano le facce ABC, *abc* uguali fra loro, come pure gli angoli diedri adiacenti a queste facce. Se si fanno combaciare le facce ABC, *abc*, la faccia *asb* si troverà nel piano della faccia ASB, ed il punto *s* caderà in un punto di questo piano. Parimente, la faccia *asc* si troverà nel piano della faccia ASC, ed il punto *s* caderà in un punto di questo piano. Nello stesso modo ancora si dimostrerà che la faccia *bsc* sarà situata nel piano della faccia BSC, e che il punto *s* caderà in un punto di questo piano; per conseguenza il punto *s* dovendosi trovare a un tempo nei tre piani ASB, ASC, BSC, si troverà nel punto *s* del loro incontro. Quindi le due piramidi triangolari coincideranno, e perciò saranno eguali.

PROPOSIZIONE LIII — *TEOREMA*.

117. *Due piramidi triangolari sono uguali quando hanno una costola uguale, e tutti i loro angoli diedri uguali ciascuno a ciascuno, e similmente disposti* (fig. 24).

Dim. Siano SABC, *sabc* due piramidi triangolari, nelle quali siano uguali gli spigoli SA. *sa*, come pure tutti gli angoli diedri similmente situati. Gli angoli triedri S, *s* sono uguali, poichè hanno i loro angoli diedri uguali ciascuno a ciascuno e similmente disposti (n° 77): per conseguenza i loro angoli piani ASB, *asb* sono eguali, come pure gli angoli ASC, *asc*. Per la stessa ragione sono uguali gli angoli triedri A, *a*, ed in conseguenza gli angoli SAB, *sab*, e gli angoli SAC, *sac*. Quindi i triangoli ASB, *asb* sono uguali, perchè hanno il lato SA uguale al lato *sa*, e sono uguali gli angoli adiacenti a questi lati ciascuno a ciascuno: lo stesso si verifica per i due triangoli ASC, *asc* Dunque le due piramidi proposte hanno un angolo diedro uguale, cioè BASC=*basc* compreso fra due facce uguali ciascuna a ciascuna e similmente disposte; perciò queste due piramidi sono uguali (n° 115).

PROPOSIZIONE LIV — *TEOREMA.*

118. *Due piramidi sono uguali quando hanno basi uguali, e due facce contigue alla prima di queste basi uguali rispettivamente a due facce contigue alla seconda, e similmente disposte* (fig. 27).

Dim. Siano SABDC, *sabdc* due piramidi, che abbiano le basi uguali ABCD, *abcd* e le facce contigue ASB, BSD rispettivamente uguali alle facce contigue *asb*, *bsd*, e similmente disposte. Si tirino le diagonali AD, *ad*, le due piramidi saranno decomposte in piramidi triangolari dai piani SAD. *sad*. Or in virtù della uguaglianza dei poligoni ABCD, *abcd*, saranno uguali i triangoli ABD, *abd*; per conseguenza le piramidi triangolari SABD, *sabd* avranno tre facce uguali ciascuna a ciascuna e similmente situate, onde saranno uguali fra loro (n° 113). Quindi se si fanno coincidere i poligoni ABCD, *abcd*, i triangoli ABD. *abd* coincideranno, come pure le piramidi triangolari uguali SABD. *sabd*; e però le due piramidi avranno tutti i loro vertici comuni, e coincideranno in tutta la loro estensione. Dunque queste piramidi sono eguali.

PROPOSIZIONE LV — *TEOREMA:*

119. *Due prismi sono eguali, quando hanno una base e due facce contigue eguali ciascuna a ciascuna e similmente disposte* (fig. 29).

Dim. Nei prismi AK, *ak* sia la base ABCDE uguale alla bare *abcde*, la faccia ABGF uguale alla faccia *abgf*, e la faccia BCHG uguale alla faccia *bchg*. Gli angoli triedri B, e *b* sono uguali poichè hanno gli angoli piani rispettivamente uguali; e similmente disposti: perciò posta la base *abcde* sopra la base ABCDE, lo spigolo *bg* coinciderà collo spigolo BG, la faccia *bchg* colla faccia BCHG. e la faccia *abgf* colla faccia ABGF. Quindi i punti *f*, *g*, *h* caderanno rispettivamente su i punti F, G, H; ma per tre punti non situati in linea retta può passare un solo piano; dunque il poligono *fghik* combacerà col suo uguale FGHIK, e gli spigoli *id*, *ke* coincideranno essi pure cogli spigoli ID, KE. Laonde i due prismi sono uguali.

120. *Corollario. Due prismi retti sono uguali quando hanno basi eguali, ed uguali altezze*; dappoichè in tal caso le loro facce rettangolari sono uguali a due a due, avendo uguali basi, ed uguali altezze.

PROPOSIZIONE LVI — *TEOREMA:*

121. *Il piano che passa per le diagonali corrispondenti delle due basi di un parallelepipedo retto, lo divide in due prismi triangolari uguali fra loro* (fig. 30).

Dim. Sia il parallepipedo retto AG, e siano ABCD, EGFH le sue basi. Essendo lo spigolo EB eguale e parallelo allo spigolo FD (n° 97) se si conducano le diagonali BD, EF delle due basi, la figura EBDF sarà un rettangolo; poichè per ipotesi il parallelepido AG è retto, e per conseguenza gli spigoli EB, FD sono perpendicolari alle basi. Quindi i due solidi ABDEFH, e BCDEGF, sono prismi triangolari retti che hanno uguali basi, ed uguali altezze, e perciò sono uguali fra loro (n° 120.)

PROPOSIZIONE LVII — *TEOREMA.*

122. *Due poliedri* S, s *sono uguali, allorchè possono decomporsi in un medesimo numero di piramidi uguali ciascuna a ciascuna e similmente disposte* (fig. 32).

Dim. Infatti. se si fanno coincidere due di queste piramidi SABC, *sabc*, supposte uguali, le piramidi vicine coincideranno con una faccia; e siccome esse sono uguali per ipotesi, e similmente disposte. così coincideranno in tutta la loro estensione. Lo stesso avrà luogo progressivamente per tutte le piramidi prese a due a due, e però i poliedri medesimi coincideranno.

123. *Scolio* La reciproca di questa proposizione è evidente, cioè che due poliedri uguali possono decomporsi in un medesimo numero di piramidi uguali ciascuna a ciascuna e similmente disposte.

PROPOSIZIONE LVIII — *TEOREMA.*

124. *Due poliedri sono uguali quando hanno le facce rispettivamente uguali e similmente disposte, e ciascun angolo diedro di due facce contigue in uno di essi uguale all'angolo diedro delle facce omologhe nell'altro* (fig. 32).

Dim. Imperocchè, se nei due poliedri si considerano due piramidi triangolari omologhe esterne SABC, *sabc*, si vedrà che esse sono uguali, poichè hanno un angolo diedro uguale compreso fra facce rispettivamente uguali. e similmente situate. Quindi se dai due poliedri si tolgano queste piramidi, si avranno altri due poliedri, nei quali le nuove facce saranno rispettivamente uguali, e saranno pure rispettivamente uguali i nuovi angoli diedri. Dunque si potrà operare sopra questi nuovi poliedri come sopra i precedenti, e così progredendo si potranno decomporre i due poliedri in un medesimo numero di piramidi triangolari uguali e similmente disposte; e però questi poliedri saranno uguali.

125. *Scolio.* La reciproca della proposizione precedente è manifesta, cioè che due poliedri eguali hanno le facce omologhe rispettivamente uguali e similmente disposte, e ciascun angolo

diedro di due facce contigue in uno di questi poliedri uguale all' angolo diedro delle facce omologhe nell' altro (*).

CAPITOLO III.

DEI POLIEDRI EQUIVALENTI.

126 *Definizione* I Lo spazio compreso dalla superficie di un solido dicesi *solidità* o *volume*.

127. *Definizione* II. Due solidi si chiamano *equivalenti* quando hanno il medesimo volume, ma non possono coincidere.

128. *Definizione* III. Misurare il volume di un solido significa determinare il suo rapporto col volume di un altro solido di nota grandezza che si prende per *unità di volume*.

129. Per unità di volume si è prescelto quello di un cubo, cui si dà per spigolo l' unità di lunghezza. Così se l' unità di lunghezza è il palmo, l' unità di volume sarà un cubo il cui spigolo è un palmo, e che perciò si chiama *palmo cubico*. Se l unità di lunghezza è la canna, l' unità di volume sarà un cubo, il cui spigolo è una canna, e si chiama *canna cubica*, e così in progresso

130. *Definizione* IV. Sotto il nome di *dimensione di un parallelepipedo rettangolo* s' intendono le tre rette che rappresentano la sua altezza, e le due dimensioni della sua base, cioè la lunghezza, e la larghezza.

131. Alle denominazioni *larghezza*, ed *altezza* si sostituiscono talvolta quelle di *grossezza*, e di *profondità*. Così si dice, per esempio, la lunghezza e l' altezza di un edifizio; la lunghezza, l' altezza, e la grossezza di un muro; la lunghezza, la larghezza, e la grossezza di una tavola; la lunghezza, la larghezza, e la profondità di un fosso. ecc.

132. Si è dato il nome di *dimensioni* alla lunghezza, larghezza, ed altezza di un parallelepipedo rettangolo, perchè esse misurano l' estensione di questo solido nelle sue tre direzioni principali. Infatti, l' estensione di un parallelepipedo rettangolo è uniforme nella direzione di ciascuna delle sue tre dimensioni; dappoichè essa è limitata da due piani paralleli, ambidue perpendicolari allo spigolo che misura questa dimensione. Siffatta disposizione particolare al parallelepipedo rettangolo non esiste più negli altri solidi; non pertanto si adopera ancora la parola *dimensione* per indicare le tre *direzioni* principali della loro estensione. abbenchè la maggior parte di questi solidi non abbia, propriamente parlando, nè lunghezza, nè

(*) Euclide ha messo come definizione che due poliedri sono uguali, quando sono compresi da un medesimo numero di piani uguali ciascuno a ciascuno. Lungi dall' essere una definizione è questo un teorema difficilissimo a dimostrarsi, e fortunatamente non è necessario negli elementi. La dimostrazione fattane dal celebre geometra Cauchy potrà leggersi nelle note alla geometria di Legendre.

larghezza, nè altezza assegnabili effettivamente. Si può ora comprendere perchè siasi prescelto il cubo per unità di volume dei solidi.

PROPOSIZIONE LVIII — *TEOREMA*.

133. ***Il parallelepipedo rettangolo ha per misura il prodotto delle sue tre dimensioni*** (fig. 33).

Dim. Sia MB il parallelepipedo rettangolo proposto. Supponiamo per fissare le idee, che lo spigolo AB contenga 6 volte l' unità di lunghezza *ab*, e che gli spigoli AD, ed AC la contengano rispettivamente 4 volte, e 7 volte.

Si divida AB in 6 parti uguali. e per tutti i punti di divisione si conducano altrettanti piani perpendicolari ad AB: parimente si divida AD in 4 parti uguali, e per tutti i punti di divisione si conducano i piani perpendicolari ad AD: finalmente si divide AC in 7 parti uguali, e per tutti i punti di divisione si conducano i piani perpendicolari ad AC.

È manifesto che con questa costruzione il parallelepipedo BM si troverà decomposto in piccoli parallelepipedi rettangoli, che avranno tutti le loro tre dimensioni uguali alla unità di lunghezza *ab*, perchè due piani perpendicolari ad una medesima retta sono paralleli fra loro (n° 25). Dunque questi piccoli parallelepipedi sono cubi, dei quali ciascuno ha per spigolo l' unità di lunghezza, e perciò è unità di volume. Or è evidente che il numero di tutti questi cubi corrisponde al prodotto dei numeri 4, 6, e 7. cioè 168, dunque se gli spigoli AB, AD, AC, sono commensurabili coll' unità di lunghezza *ab*, il parallelepipedo rettangolo BM avrà per misura il prodotto delle sue tre dimensioni.

Suppongasi in secondo luogo che due spigoli soltanto AB, ed AD, sieno commensurabili coll' unità di lunghezza *ab*, dico che anche in questo caso il volume del parallelepipedo BM sarà espresso dal prodotto dei tre spigoli AB, AD, AC. Infatti, si supponga, se è possibile, che il volume accennato sia espresso dal prodotto AB $\times$ AD per un terzo spigolo AO minore di AC. Si prenda una parte aliquota di *ab* che sia minore di OC, e si tolga dallo spigolo AC tante volte quante si può, si avrà un risiduo CL minore di OC; pel punto L si conduca un piano parallelo alla base ABD del parallelepipedo proposto. Il parallelepipedo BN che ne risulta avrà per misura il prodotto dei tre spigoli AB, AD. AL, poichè questi spigoli sono commensurabili coll' unità di lunghezza. Ma per ipotesi il prodotto degli spigoli AB, AD, AO è la misura del parallelepipedo BM, dunque il parallelepipedo BN dovrebbe essere maggiore del parallelepipedo BM; il che è assurdo. Nello stesso modo si dimostrerebbe che il volume del parallelepipedo BM non può essere espresso dal prodotto AB $\times$ AD per un terzo spigolo maggiore di AC.

In terzo luogo sia il solo spigolo AD commensurabile con *ab*, e si supponga che il volume del parallelepipedo BM sia espresso da AB

$\times$ AD per un terzo spigolo minore di AC. Si faccia la costruzione sopraccennata, e sarà il parallelepipedo BN espresso dal prodotto dei tre spigoli AB, AD, AL, poichè AD, ed AL sono commensurabili coll' unità di lunghezza. Laonde il parallelepipedo BN sarebbe maggiore del parallelepipedo BM; il che non può sussistere.

Finalmente se tutti e tre gli spigoli sono incommensurabili coll'unità di lunghezza, si farà la stessa costruzione adoperata nei due casi precedenti, e si dimostrerà nello stesso modo che il parallelepipedo BN, che in questo caso avrebbe un solo spigolo commensurabile AL, sarebbe maggiore di BM. Dunque in ogni caso il parallelepipedo rettangolo ha per misura il prodotto delle sue tre dimensioni.

134. *Scolio*. Quando si dice che il parallelepipedo rettangolo BM ha per misura il prodotto delle sue tre dimensioni, si fa uso di una espressione abbreviata, colla quale si vuole intendere che il parallelepipedo proposto BM sta al cubo *bm*, che è l'unità di volume, come il numero astratto risultante dal prodotto delle tre linee AB, AD, AC all' unità di lunghezza *ab*. Or siccome il prodotto di AB moltiplicata per AD rappresenta l'aja del rettangolo ABD, così se si prenda questo rettangolo per base del parallelepipedo, lo spigolo AC ne sarà l'altezza; e però si può dire che: *il parallelepipedo rettangolo ha per misura il prodotto della sua base per la sua altezza.*

Parlando a rigore, è impossibile moltiplicare una superficie per una linea, ma questo modo di dire è una espressione abbreviata, colla quale si dee intendere che il numero astratto delle unità quadrate della base del parallelepipedo moltiplicato pel numero astratto delle unità lineari dell' altezza dà per prodotto un altro numero pure astratto, il quale esprime il rapporto del parallelepipedo proposto al cubo, ch' è l' unità di volume.

135. *Corollario* I. Se il parallelepipedo rettangolo è un cubo, se ne avrà la misura prendendo il numero delle unità di lunghezza contenute in uno dei suoi spigoli, e formando un prodotto in cui questo numero entri tre volte come fattore. Così, se lo spigolo del cubo proposto contiene 2 unità di lunghezza, questo cubo conterrà 8 unità di volume. Ed ecco perchè in aritmetica si è dato il nome di cubo al prodotto di tre fattori uguali.

136. *Corollario* II. Due parallelepipedi rettangoli che hanno basi equivalenti, ed altezze uguali, sono equivalenti, dappoichè hanno la stessa misura.

137. *Corollario* III. Due parallelepipedi rettangoli che hanno le basi in ragion reciproca delle altezze. sono equivalenti.

138. *Corollario* IV. Due parallelepipedi rettangoli che hanno la stessa altezza, stanno fra loro come le basi. Viceversa, se hanno uguali basi, o basi equivalenti, stanno fra loro come le altezze.

139. *Corollario* V. Due parallelepipedi rettangoli qualunque stanno fra loro come i prodotti delle loro tre dimensioni, ovvero come i prodotti delle basi moltiplicate per le altezze, o finalmente in ragione composta dalla ragione delle basi, e dalla ragione delle altezze.

PROPOSIZIONE LIX — *TEOREMA*.

140. *Ogni parallelepipedo retto è equivalente ad un parallelepipedo rettangolo che ha la stessa altezza, ed una base equivalente.* (fig. 34).

Dim. Sia AL un parallelepipedo retto, di cui la base è il parallelogrammo ABCD. Dai punti A, e B si abbassino sopra DC le perpendicolari AO, BN, indi dai punti O, e C s' innalzino sopra DC nel piano MDCL le perpendicolari OQ, NP, e finalmente si tirino le rette IQ, KP. Con questa costruzione si avrà il solido AP, che sarà un parallelepipedo rettangolo equivalente al parallelepipedo proposto. Infatti, la base ABNO è un rettangolo equivalente al parallelogrammo ABCD; parimente la base superiore IKPQ è un rettangolo equivalente al parallelogrammo IKLM. Di più, le facce laterali del solido AP sono pure rettangolari; dappoichè essendo MD perpendicolare al piano della base ABCD del parallelepipedo retto, le linee QO, NP parallele a MD saranno pure perpendicolari al piano medesimo (n° 24); ma gli spigoli IA, KB sono essi ancora perpendicolari al piano accennato; dunque il solido AP è un parallelepipedo rettangolo. Or da un' altra parte i due prismi triangolari retti AM, BL sono uguali, poichè le basi ADO, BCN sono uguali, come pure le altezze DM, NP (n° 120): dunque se a questi due prismi si aggiunge di comune il solido ABCOIKLQ, il parallelepipedo retto AL risulterà equivalente al parallelepipedo rettangolo AP.

141. *Corollario* I. Dalla proposizione precedente, si deduce che *Il parallelepipedo retto ha per misura il prodotto della sua base per la sua altezza.*

142. *Corollario* II. Due parallelepipedi retti che hanno le basi equivalenti, e le altezze uguali, sono equivalenti.

143. *Corollario* III. Il prisma triangolare retto BCDF (fig. 30) ha per misura il prodotto della sua base per la sua altezza.

Infatti, il prisma triangolare retto BCDF è metà (n° 121) del parallelepipedo retto CH che ha una base doppia e la stessa altezza.

144. *Corollario* IV. Dal corollario precedente apparisce che *Due prismi triangolari retti sono equivalenti, quando hanno basi equivalenti, ed altezze uguali.*

PROPOSIZIONE LX — *TEOREMA*.

145. *Due piramidi triangolari rette che hanno basi equivalenti, ed altezze uguali, sono equivalenti* (fig. 35).

Dim. Sieno SABC, *sabc* due piramidi triangolari rette. Si supponga che le basi ABC, *abc* sieno situate in un medesimo piano, e che l' altezza della prima piramide si confonda collo spigolo SA, e l' altezza della seconda cada sul lato *ac* della base *abc*; poichè se cadesse dentro di questa base, la dimostrazione seguente resterebbe sempre la stessa.

Si chiamino P, e p i volumi delle due piramidi: se queste piramidi non sono equivalenti, sia *sabc* la più piccola. Sarà sempre possibile prendendo un' altezza conveniente Ax, costruire un prisma retto avente per base il triangolo ABC, di cui il volume sia uguale alla differenza $P - p$ dei volumi delle due piramidi proposte.

Si divida l'altezza SA in parti uguali minori di Ax e per i punti di divisione D, G, K, ecc. si conducano altrettanti piani paralleli al piano delle basi; le sezioni fatte da ciascuno di questi piani nelle due piramidi saranno equivalenti (n° 142), onde si avrà DEF = *def*, GHI, = *ghi*, ecc.

Ciò premesso, sopra i triangoli ABC, DEF, GHI. ecc. presi per basi si costruiscano i prismi retti esterni ABCN. DEFO, GHIP, ecc., che abbiano per altezze le parti AD, DG, GK, ecc. dell' altezza SA. Parimente sopra i triangoli *def*. *ghi klm*. ecc. presi per basi si costruiscano nella seconda piramide i prismi retti interni *defo*, *ghip*; ec. dei quali le altezze saranno uguali alle altezze AD, DG, GK, ec. dei prismi esterni appartenenti alla prima piramide. Quindi tutti i prismi fin qui mentovati avranno per altezza comune AD.

La somma de' prismi esterni della piramide SABC è maggiore del volume di questa piramide; al contrario la somma de' prismi interni della piramide *sabc* è minore del volume di questa piramide; dunque per queste due ragioni, se si chiami S la somma de' prismi esterni, e *s* quella degli interni dovrà essere la differenza $S - s$ maggiore della differenza $P - p$.

Or a partire dalle basi ABC, *abc*, il secondo prisma esterno DEFO è equivalente al primo prisma interno *defo* (n° 142), poichè hanno basi equivalenti ed altezze uguali: sono equivalenti per la stessa ragione il terzo prisma esterno GHIP ed il secondo interno *ghip*, il quarto esterno ed il terzo interno, e così in progresso fino all'ultimo degli uni e degli altri. Dunque tutti i prismi esterni della piramide SABC, eccetto il primo ABCN, hanno i loro equivalenti ne' prismi interni della piramide *sabc*; per conseguenza la differenza $S - s$ sarà uguale al prisma accennato ABCN. Ma per costruzione la differenza $P - p$ delle due piramidi è maggiore del prisma ABCN, dunque la differenza $S - s$ dei prismi sarà minore della differenza $P - p$ delle piramidi; il che è assurdo, perchè più sopra si è dimostrata maggiore: dunque la piramide SABC non può essere maggiore della piramide *sabc*. Nello stesso modo si dimostrerà che non può essere minore, poichè basterà costruire i prismi esterni nella piramide *sabc*, e gl'interni nella piramide SABC; perciò le due piramidi sono equivalenti. (*)

(*) La condizione particolare della piramide ABCS, di avere per costola la sua altezza AS, nulla toglie alla generalità della dimostrazione. Infatti, se le due piramidi rette fossero comunque, ciascuna di esse sarebbe equivalente ad una terza piramide avente eguale altezza, e base equivalente; e condizionata come la ABCS.

PROPOSIZIONE LXI — *TEOREMA.*

146. *Ogni piramide triangolare obliqua è equivalente ad una piramide triangolare retta che ha la medesima base, e la medesima altezza* (fig. 27).

Dim. Sia SD l'altezza della piramide obliqua SABC. Si tirino le rette BD, AD, CD; indi si costruisca un triangolo *abc* uguale al triangolo ABC, e sopra *bc* si costruisca il triangolo *bcd* uguale al triangolo BCD, sarà il quadrilatero *abcd* uguale al quadrilatero ABCD. Ciò premesso, s'innalzi dal punto *o* sul piano *abcd* la perpendicolare *os* = DS, e si conducano le rette *sa*, *sb*, *sc*, *sd*, *ad*.

La piramide triangolare retta SABD è equivalente alla piramide triangolare retta *sabd*, dappoichè la base ABD della prima è uguale alla base *abd* della seconda, e l'altezza SD è uguale all' altezza *so* (n° 145). Parimente si dimostra che la piramide triangolare SADC è equivalente alla piramide triangolare *sadc*: per consequenza la piramide quadrangolare SABDC è equivalente alla piramide quadrangolare *sabdc*. Ma la piramide triangolare retta SBDC è equivalente alla piramide triangolare retta *sbdc*: dunque se dalle due piramidi quadrangolari si tolgano queste due piramidi triangolari, resterà la piramide triangolare obliqua SABC equivalente alla piramide triangolare retta *sabc*.

147. *Corollario.* Dal teorema precedente si deduce evidentemente che: *due piramidi triangolari qualunque che hanno le basi equivalenti, e le altezze uguali, sono equivalenti.*

PROPOSIZIONE LXII — *TEOREMA.*

148. *Ogni piramide triangolare è equivalente alla terza parte del prisma triangolare della medesima base, e della medesima altezza* (fig. 36).

Dim. Sia ABCD una piramide triangolare. Per i punti B, e C, si conducano le rette BE, CF uguali e parallele ad AD (n° 27), indi si congiungano i punti E, D, F colle rette ED, DF, FE: con questa costruzione si formerà il prisma triangolare AE, il quale avrà la medesima base ABC, e la medesima altezza della piramide proposta.

Ciò premesso, per i tre punti C, D, E, si faccia passare un piano, questo dividerà la piramide quadrangolare EBCFD in due piramidi triangolari equivalenti EBCD, ECFD, poichè hanno basi uguali, e la stessa altezza, cioè la perpendicolare abbassata dal vertice comune D sul piano EBCF. Or considerando la piramide ECFD come se avesse per base il triangolo EDF, e per vertice il punto C, ne seguo che le due piramidi ECDF, ABCD avranno basi uguali, ed altezze uguali; perciò queste due piramidi saranno uguali, ed il prisma triangolare sarà decomposto nelle tre piramidi triangolari equi-

valenti fra loro ABCD, EBCD, ECFD. Laonde la piramide proposta ABCD sarà la terza parte del prisma AE.

149. *Corollario* I. *Due prismi triangolari che hanno le basi equivalenti, e le altezze uguali sono equivalenti, perchè le piramidi loro terze parti sono equivalenti* (n° 145).

150. *Corollario* II. Dal corollario precedente si deduce che un prisma triangolare obliquo è equivalente ad un prisma triangolare retto di base equivalente e della stessa altezza, ma il prisma triangolare retto ha per misura il prodotto della base per l'altezza(n°143); per conseguenza: *ogni prisma triangolare ha per misura il prodotto della sua base per la sua altezza.*

151. *Corollario* III. Ma la piramide triangolare è la terza parte del prisma triangolare della stessa base. e della stessa altezza, dunque *Ogni piramide triangolare ha per misura il prodotto della sua base pel terzo della sua altezza.*

152. *Corollario* IV. Potendosi ogni prisma poligono decomporre in prismi triangolari della stessa altezza (n° 106): ed ogni piramide poligona in piramidi triangolari della stessa altezza (n° 103), ne consegue che

1.° *Ogni prisma ha per misura il prodotto della sua base per la sua altezza.*

2.° *Ogni piramide ha per misura il prodotto della sua base pel terzo della sua altezza; e per conseguenza*

3.° *Ogni piramide è la terza parte del prisma della stessa base, e della stessa altezza.*

PROPOSIZIONE LXIII — *TEOREMA.*

153. *Il piano che passa per le diagonali corrispondenti di due facce opposte di un parallelepipedo obliquo, lo divide in due prismi triangolari equivalenti* (fig. 30).

Dim. Sia il parallelepipedo obliquo CH, e per le diagonali corrispondenti EF. BD di due facce opposte qualunque si faccia passare il piano EBDF, il quale dividerà il parallelepipedo proposto nei due solidi ABDH, BDCG. In primo luogo questi due solidi sono prismi triangolari; poichè i triangoli ABD, EFH, avendo i loro lati uguali e paralleli, sono uguali fra loro, e nel tempo stesso le facce laterali sono tre parallelogrammi. Quindi il solido ABDH è un prisma triangolare, e lo stesso si dimostra pel solido BDCG.

In secondo luogo, i due prismi triangolari accennati sono equivalenti, perchè hanno basi uguali ed altezze uguali (n° 149), dunque il piano EBDF divide il parallelepipedo obliquo in due prismi equivalenti.

154. *Corollario* I. Poichè il prisma triangolare ha per misura il prodotto della sua base per la sua altezza (n.° 150), apparisce dalla proposizione precedente che

Un parallelepipedo qualunque ha per misura il prodotto della sua base per la sua altezza; e per conseguenza.

155. *Corollario* II. *Due parallelepipedi qualunque che hanno basi equivalenti, ed altezze eguali, sono equivalenti.*

Da ciò si conchiude ancora che due parallelepipedi sono equivalenti, se hanno la stessa base, o basi equivalenti, e sono come nella (fig. 37) situati fra gli stessi piani paralleli; per la qual cosa si potrà sempre trasformare un parallelepipedo obliquo qualunque in un parallelepipedo rettangolo equivalente.

156. *Scol'o.* Tutti i teoremi ricavati (nº 136 al nº 139) come corollarj della misura del parallelepipedo rettangolo si possono applicare a due parallelepipedi qualunque, a due prismi qualunque, ed anche a due piramidi qualunque. Ciò risulta da quanto fin qui si è esposto.

PROPOSIZIONE LXIV — *TEOREMA.*

157. *Se una piramide triangolare si tagli con un piano parallelo alla base, il tronco che resta togliendo la piccola piramide è equivalente alla somma di tre piramidi, che hanno per comune altezza quella del tronco, e per basi l'una la base inferiore del tronco, l'altra la base superiore, e l'ultima una media proporzionale fra queste due basi* (fig. 38).

Dim. Sia ABCDEF un tronco di piramide triangolare. Per i punti A, E, C si faccia passare un piano, il quale distaccherà dal tronco la piramide triangolare ABCE che ha per base la base inferiore del tronco, e per altezza l'altezza del tronco medesimo; poichè il vertice E si ritrova nel piano DEF: questa è la prima delle tre piramidi.

Rimane la piramide quadrangolare che ha per vertice il punto E, e per base il trapezio DACF. Per i tre punti D, E, C si faccia passare un piano, che dividerà la piramide accennata in due piramidi triangolari. La prima EDFC può considerarsi come avente per base il triangolo DEF e per vertice il punto C, per conseguenza avrà per base la base superiore del tronco, e la stessa altezza di esso. Dunque è questa la seconda piramide.

In quanto alla piramide EDAC, a fine di trasformarla in un'altra equivalente, si conduca pel punto E nel piano ADEB la retta EK parallela ad AD, e si uniscano DK, e KC. La piramide EDAC è equivalente alla piramide ADCK, perchè hanno la stessa base ADC, e la stessa altezza, essendo i loro vertici situati in una retta EK parallela ad AD, ovvero al piano ADC. Ma la piramide DACK può considerarsi come se avesse per base il triangolo AKC, e per vertice il punto D, resta dunque a dimostrare che la base AKC è media proporzionale fra le due basi del tronco. Infatti, essendo le rette DE, DF respettivamente parallele ad AB, AC, e rivolte dalla stessa parte, sarà l'angolo EDF uguale all'angolo BAC. Ma DE=AK, se dunque si considerano DF, ed AC come basi dei triangoli DEF, AKC, le perpendicolari abbassate dai vertici E, K su queste basi; ovvero le altezze dei due triangoli saranno uguali; e però i triangoli DEF,

AKC staranno come le basi DF, AC. Ma i triangoli AKC, ABC stanno ancora come le basi, AK, AB, ovvero come DE, AB, perchè hanno la stessa altezza: e per la simiglianza dei triangoli DEF, ABC si ha DF: AC :: DE: AB, dunque in fine sarà
DEF: AKC :: AKC: ABC.

PROPOSIZIONE LXV — *TEOREMA*.

158. *Il tronco a basi parallele di una piramide qualunque è equivalente alla somma di tre piramidi, che hanno per comune altezza quella del tronco, e le loro basi sono la base inferiore del tronco, la base superiore, ed una media proporzionale fra queste due basi* (fig. 28).

Dim. Sia S una piramide qualunque, T una piramide triangolare: si supponga che le basi ABCD, MNP sieno equivalenti, e situate in un medesimo piano; e che le altezze SO, TQ sieno uguali fra loro; indi si conduca un piano parallelo a quello delle basi che tagli le due piramidi.

Essendo per ipotesi le basi equivalenti, le sezioni *abcd*, *mnp* saranno ancora aquivalenti (n° 102); per conseguenza le piramidi parziali S*abcd*, T*mnp* saranno equivalenti. Ma le piramidi intere sono equivalenti, perchè hanno basi equivalenti, ed altezze uguali, dunque il tronco della piramide poligona è equivalente al tronco della piramide triangolare; e però il tronco di una piramide qualunque sarà uguale alla somma delle tre piramidi indicate nell' enunciazione del teorema.

159. *Corollario.* Da ciò si deduce che

Il tronco di piramide a basi porallele ha per misura il terzo del prodotto della sua altezza per la somma delle sue due basi e di una media proporzionale fra queste due basi.

PROPOSIZIONE LXVI — *TEOREMA*.

160. *Se si taglia un prisma triangolare con un piano* DEF *inclinato alla base* ABC, *il tronco* ABCF *sarà uguale alla somma di tre piramidi, che hanno per base comune la bose inferiore del tronco, e per vertici quelli della base superiore* (fig. 39).

Dim. Per i punti A, E, C si faccia passare un piano, il quale distaccherà dal tronco la piramide triangolare ABCE, che ha per base la base inferiore del tronco, e per vertice il punto E della base superiore.

Per i punti D, E, C si conduca un piano, il quale dividerà la piramide quadrangolare EADFC in due piramidi triangolari. La prima EDAC avendo per base il triangolo DAC e per vertice il punto E, sarà equivalente alla piramide DACB, che ha la stessa base, e la stessa altezza, essendo i vertici E, B situati nella retta EB paral-

lela al piano DAC. Ma la piramide DACB può considerarsi come se avesse per base il triangolo ABC, e per vertice il punto D, dunque si ha la seconda piramide.

Rimane ora a considerare la piramide EDFC, la quale è equivalente alla piramide AEFC, poichè hanno la stessa base ECF, e la stessa altezza, essendo i vertici D, A situati nella retta DA parallela al piano ECF. Ma la piramide AEFC può considerarsi come se avesse per base il triangolo ACF, e per vertice il punto E, e perciò è equivalente alla piramide ACFB, che ha la stessa base e la stessa altezza, dunque la piramide ECFD è equivalente alla piramide ACFB, la quale sarà la terza piramide richiesta, perchè si può considerare come se avesse per base il triangolo ABC; e per vertice il punto F.

161. *Corollario.* Dal teorema precedente s' inferisce che

Il prisma triangolare troncato ha per misura il prodotto della sua base pel terzo della somma delle tre perpendicolari abbassate su questa base dai vertici opposti.

162. *Scolio.* Quando si ha un tronco di prisma triangolare retto, le perpendicolari abbassate dai vertici, D, E, F sulla base ABC si confondono cogli spigoli DA, EB, FC; e però ne consegue che

Il tronco di prisma triangolare retto ha per misura il prodotto della base pel terzo della somma dei suoi tre spigoli laterali.

PROPOSIZIONE LXVII — *TEOREMA.*

163. *Ogni poliedro si può trasformare in una piramide equivalente* (fig. 31).

Dim. Potendosi ogni poliedro decomporre in piramidi (n° 111), il suo volume risulterà dalla somma delle piramidi parziali, le quali in generale avranno diverse altezze. Così, abbiam veduto (n° 110) che se si prenda un punto O nell' interno di un parallelepipedo AG, le rette tirate da quel punto a tutt' i vertici del poliedro, lo dividono in sei piramidi quodrangolari, che hanno per vertice comune il punto O, e per basi le facce del poliedro medesimo. Quindi le altezze delle piramidi saranno le perpendicolari abbassate da quel vertice sopra ciascuna faccia. Or se si chiami L l' altezza della piramide ABFEO, non sarà difficile vedere che ciascuna delle cinque piramidi rimanenti potrà esser trasformata in una piramide equivalente, che abbia per altezza l' altezza L della piramide ABFEO; perocchè (n° 156) si è dimostrato che due piramidi sono equivalenti, allorchè hanno le basi in ragione reciproca delle altezze. Se per esempio, si chiami K l' altezza della piramide CDHGO, questa si potrà trasformare in un' altra equivalente, che abbia l' altezza L, ed una base M, che sarà determinata dalla proporzione

L : K :: CDHG : M.

Similmente si potranno determinare le basi N, P, Q, R delle piramidi, che hanno la comune altezza L, e sono equivalenti alle quat-

tro restanti piramidi del parallelepipedo AG. Se dunque si costruisce una piramide, che abbia L per altezza, e per base un poligono S, equivalente alla somma de' poligoni ABFE, M, N. P, Q, R, essa sarà equivalente al parallelepido AG. La costruzione del poligono S si esegue facilmente riducendo prima quei poligoni ad altrettanti quadrati; e però il parallelepipedo AG si può trasformare in una piramide equivalente. Ma è manifesto che la stessa costruzione può applicarsi ad un poliedro qualunque, dunque il teorema proposto è dimostrato.

164. *Scolio.* Si può facilmente vedere che a due piramidi si possono sempre sostituire due parallelepidi rettangoli ad esse rispettivamente equivalenti. Infatti, si può sempre costruire un parallelogrammo rettangolo equivalente al poligono, che forma la base di una delle due piramidi; ed in tal guisa si ha la base di uno de' due parallelepipedi: l'altezza sarà la terza parte dell'altezza della piramide medesima. Quindi se si sapesse trovare in linee il rapporto di due parallelepipedi rettangoli, si potrebbe ridurre il rapporto di due poliedri qualunque al semplice rapporto di due linee, come nella geometria piana si è fatto per due poligoni qualunque. Questo risultamento è della più grande importanza, e fa conoscere la potenza della geometria; dappoichè il rapporto di due linee si può sempre assegnare in numeri, sia esattamente, sia con quella approssimazione che si vuole; per conseguenza la riduzione del rapporto delle figure piane e solide a quello di due linee non solamente è per se stesso un mirabile concepimento geometrico; ma fa vedere ancora la possibilità di applicare alla pratica le speculazioni della geometria. Per queste ragioni ci occuperemo nella proposizione seguente del rapporto in linee di due parallelepipedi rettangoli.

PROPOSIZIONE LXVIII — *TEOREMA.*

165. *Il rapporto di due parallelepipedi rettangoli si può sempre esibire in linee* (fig. 33).

Dim. Siano AB, AD, AC le dimensioni di un parallelepipedo rettangolo BM, ed *ab*, *ad*, *ac* quelle di un altro parallelepipedo rettangolo *bm*.

Si trovi una quarta proposizionale X in ordine alle tre linee *ab*, AB, AD, ed una quarta proporzionale Y in ordine alle tre linee AC, *ad*, *ac*. Dico che le due linee X, Y stanno fra loro come i due parallelepipedi BM, *bm*.

Infatti, essendo per costruzione

$$ab : AB :: AD : X,$$

sarà $AB \times AD = ab \times X$. Moltiplicando dall'una e dall'altra parte per AC, sarà $AB \times AD \times AC = AC \times ab \times X$.

Similmente essendo per costruzione

$$AC : ad :: ac : Y,$$

sarà $ad \times ac = AC \times Y$, e moltiplicando questi due prodotti eguali

per ab, risulterà $ab \times ad \times ac = AC \times ab \times Y$. Quindi i due parallelepipedi proposti BM, e bm staranno fra loro come i due prodotti $AC \times ab \times X$, $AC \times ab \times Y$, ovvero come X a Y, poichè $AC \times ab$ è un fattore comune all'antecedente ed al conseguente; e però il teorema è dimostrato.

CAPITOLO IV.

DEI POLIEDRI SIMILI.

166. Dato un poliedro qualunque, è evidente che si può sempre concepire un altro poliedro, il quale sotto diversa estensione abbia la medesima figura. Questi due solidi saranno allora composti di un medesimo numero di facce simili e similmente disposte, ed avranno gli angoli diedri uguali ciascuno a ciascuno, come pure gli angoli solidi, ed in fine saranno ne' due poliedri proporzionali tutti gli spigoli omologhi, vale a dire quelli che caderebbero nella stessa direzione quando si soprapponesse un angolo solido di un poliedro al suo uguale nel poliedro simile.

167. Or siccome per determinare un poliedro non è necessario conoscere tutte le parti che lo compongono, così pure non è necessario verificare tutti i caratteri di simiglianza sopraccennati per concludere che due poliedri sono simili. Quindi si possono definire i poliedri simili nel modo qui appresso.

168. *Definizione*. Due poliedri si dicono ***simili*** quando hanno tutte le loro facce simili, similmente disposte, e gli angoli solidi formati dalle facce omologhe rispettivamente uguali. (*)

PROPOSIZIONE LXIX — *TEOREMA*.

169. *Se si taglia una piramide con un piano parallelo alla base, la piramide parziale sarà simile alla piramide intera* (fig 28)

Dim. Sia la piramide SABCD tagliata da un piano $abcd$ parallelo alla base, dico, che la piramide $Sabcd$ è simile a SABCD. Infatti, tutte le facce dell' una sono simili alle facce dell' altra; e però gli spigoli omologhi sono proporzionali, e gli angoli piani degli angoli solidi omologhi sono uguali ciascuno a ciascuno. Inoltre è evidente che gli angoli diedri omologhi sono uguali; dunque saranno ancora uguali gli angoli solidi omologhi (n. 80); e per conseguenza le due piramidi sono simili.

(*) Qualche *restauratore* di Euclide ha trovato a ridire su questa definizione de' poliedri simili, dovuta al celebre geometra Roberto Simson. Ma essa è stata giudicata esatta dai Matematici, e non può mai dar luogo a veruno equivoco, se si terranno presenti le considerazioni, che precedono la definizione medesima.

PROPOSIZIONE LXX — *TEOREMA*.

170. *Due piramidi triangolari sono simili quando hanno gli angoli diedri uguali ciascuno a ciascuno e similmente situati* (fig.40)

Dim. Siano SABC, e *sabc* due piramidi triangolari che abbiano i loro angoli diedri uguali ciascuno a ciascuno e similmente situati: gli angoli triedri *S*, e *s* avendo i loro angoli diedri uguali ciascuno a ciascuno e similmente disposti, sono uguali fra loro (n. 77), e per conseguenza hanno gli angoli piani uguali. Lo stesso si può dimostrare per gli angoli triedri A, ed *a*, come pure per gli angoli triedri B, e *b*. Quindi i due triangoli ASB, ed *asb* sono equiangoli, e perciò simili. Nello stesso modo si dimostra la simiglianza delle altre facce delle due piramidi triangolari, dunque queste piramidi sono simili.

PROPOSIZIONE LXXI — *TEOREMA*.

171. *Due piramidi triangolari sono simili quando hanno una faccia simile adiacente a tre angoli diedri uguali ciascuno a ciascuno* (fig. 40)

Dim. Nelle piramidi triangolari SABC, *sabc* siano ABC, *abc* le due facce simili, gli angoli triedri A ed *a* saranno uguali, perchè hanno un angolo piano uguale adiacente a due angoli diedri uguali ciascuno a ciascuno e similmente disposti (n. 79); per conseguenza saranno uguali gli angoli diedri SA, *sa*; e nello stesso modo si dimostrerà l' uguaglianza degli altri angoli diedri. Dunque (n. 176) le due piramidi triangolari sono simili.

PROPOSIZIONE LXXII — *TEOREMA*

172. *Due piramidi triangolari sono simili quando hanno un angolo diedro uguale compreso fra due facce rispettivamente simili e similmente disposte* (fig. 40).

Dim. Sia l' angolo diedro SA uguale all' angolo diedro *sa*, e le facce SAB, SAC che comprendono il primo sieno rispettivamente simili alle facce *sab*, *sac* che comprendono il secondo; gli angoli triedri S, *s* risultano uguali, perchè hanno un angolo diedro uguale compreso fra due angoli piani uguali ciascuno a ciascuno (n. 78); per conseguenza sono uguali gli angoli diedri SB, e *sb*. Parimente gli angoli triedri A, ed *a* saranno uguali, perchè hanno un angolo diedro uguale compreso fra due angoli piani uguali ciascuno a ciascuno e similmente disposti; perciò saranno uguali gli angoli diedri, AB, ed *ab*.

Quindi le due piramidi triangolari proposte hanno le facce simili ASB, *asb* adiacenti a tre angoli diedri rispettivamente uguali e similmente situati, e però sono simili (n. 171).

PROPOSIZIONE LXXIII — *TEOREMA*

173. *Due piramidi triangolari sono simili quando hanno tre facce simili ciascuna a ciascuna e similmente disposte* (fig. 40).

Dim. Siano le facce ASB, ASC, BSC rispettivamente simili alle facce *asb*, *asc*, *bsc* e similmente disposte. Gli angoli triedri S, e *s* saranno uguali, poichè hanno i loro tre angoli piani uguali ciascuno a ciascuno e similmente situati; e per conseguenza risultano uguali gli angoli diedri SA, *sa*; e le due piramidi proposte saranno simili in virtù del teorema precedente.

PROPOSIZIONE LXXIV — *TEOREMA*

174. *Due piramidi triangolari simili hanno i loro spigoli omologhi proporzionali alle altezze* (fig. 40)

Dim. Siano SABC, *sabc* due piramidi triangolari simili. Facendo coincidere l'angolo triedro *s* col suo uguale S, la piramide *sabc* verrà rappresentata dalla piramide SEDF. La retta ED sarà parallela ad AB, perchè l'angolo SED = SAB; e per la stessa ragione la retta DF sarà parallela a BC. Quindi il piano EDF sarà parallelo al piano ABC (n. 42). Or se dal punto S si abbassi la perpendicolare sopra uno di questi piani, essa sarà ancora perpendicolare all'altro. Siano SO, SG le altezze delle due piramidi prese sopra questa perpendicolare, in virtù dei piani paralleli EDF, ABC, si avrà (n. 100),

$$SA : SE :: SO : SG.$$

per conseguenza le altezze sono proporzionali agli spigoli omologhi

PROPOSIZIONE LXXV — *TEOREMA*.

175. *Due poliedri simili sono composti di un medesimo numero di piramidi triangolari simili rispettivamente e similmente disposte* (fig. 32.)

Dim. Siano SAB, ABCD, CDE tre facce consecutive del primo poliedro, e *sab abcd*, *cde* le tre facce omologhe del secondo. Supponiamo che i due poliedri siano decomposti in piramidi aventi per vertici i punti omologhi S, *s*, e per basi le facce dei poliedri medesimi; supponiamo inoltre che queste piramidi siano divise in piramidi triangolari aventi per vertici gli stessi punti S, *s* e si tirino le diagonali SC, SD, SE, *sc*, *sd*, *se*, come pure le rette AC, *ac*.

Le due facce ABCD, *abcd* essendo simili per ipotesi saranno ancora simili i triangoli ABC, *abc*.

Da un'altra parte sono uguali gli angoli diedri CBAS, *cbas*, poichè essendo simili i poliedri sono uguali gli angoli solidi omologhi, dunque le due piramidi triangolari SABC, *sabc* hanno un angolo

diedro uguale compreso fra due facce simili rispettivamente e similmente disposte, perciò saranno simili. Dal che si deduce la simiglianza delle facce omologhe ASC, *asc*, e l'uguaglianza degli angoli diedri SABC, *sabc*. Gli angoli diedri SACD, *sacd* saranno ancora uguali, perchè sono supplementi dei precedenti. Di più, i triangoli ADC, *adc* sono simili, dunque le due piramidi triangolari SACD, *sacd* hanno un angolo diedro uguale compreso fra due facce simili ciascuna a ciascuna e similmente disposte; e però queste piramidi sono simili. Da ciò si conclude la simiglianza delle facce omologhe DSC, *dsc*, e l'uguaglianza degli angoli diedri SDCA, *sdca*. Or essendo simili i poliedri, gli angoli diedri omologhi EDCA, *edca* sono uguali, perchè sono uguali gli angoli solidi omologhi. Se dunque da questi ultimi angoli diedri si tolgono i precedenti, i rimanenti angoli diedri SCDE, *scde* saranno uguali. Ma i triangoli DCE, *dce* sono simili (e lo sarebbero ancora se in luogo di essere facce omologhe dei due poliedri, facessero semplicemente parte di due facce omologhe); dunque le due piramidi triangolari SCDE, *scde* hanno un angolo diedro uguale compreso fra due facce simili rispettivamente e similmente disposte, e perciò sono simili.

Continuando nello stesso modo, si potrà dimostrare progressivamente la simiglianza di tutte le piramidi triangolari che compongono i due policdri proposti.

PROPOSIZIONE LXXVI — *TEOREMA.*

176. *Nei poliedri simili gli spigoli omologhi, le diagonali omologhe delle facce omologhe, e le diagonali interne omologhe sono proporzionali* (fig. 32).

Dim. Infatti, 1° dalla simiglianza delle facce omologhe dei due poliedri si deducano le proporzioni.

SA: *sa*:: AB: *ab*:: CD: *cd*:: DE: *de*, ec. e però gli spigoli omologhi sono proporzionali.

2.° Si considerino due diagonali omologhe, per esempio, AC, *ac* di due facce omologhe ABCD, *abcd*, è manifesto che le diagonali accennate sono proporzionali agli spigoli omologhi AB, *ab*. Parimente le diagonali omologhe di due altre facce omologhe sono proporzionali a due spigoli omologhi; ma tutti gli spigoli omologhi sono proporzionali, dunque le diagonali omologhe delle facce omologhe sono proporzionali.

3.° Finalmente, se si considerano due diagonali omologhe interne per esempio, SE, *se*, queste saranno proporzionali agli spigoli omologhi CD, *cd*, in virtù della simiglianza delle piramidi SCDE, *scde* dunque le diagonali interne omologhe sono proporzionali.

PROPOSIZIONE LXXVII — *TEOREMA.*

177. *Le superficie dei poliedri simili stanno fra loro come i quadrati degli spigoli omologhi* (fig. 32).

Dim. Le aje dei poligoni simili stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi, dunque sarà la faccia SAB alla faccia *sab* come il quadrato di AB al quadrato di *ab*. Parimente sarà la faccia ABCD alla faccia *abcd* come il quadrato di AB al quadrato di *ab*, e la faccia DCE alla faccia *dce*, come il quadrato di DC al quadrato di *dc*. Ma tutti gli spigoli omologhi dei poliedri simili sono proporzionali, e però sono proprorzionali anche i loro quadrati; dunque sarà la facc a ASB alla faccia *asb* come la faccia ABCD ad *abcd*, e come DCE a *dce*, ecc.

Quindi la somma di tutte le facce del primo poliedro sarà alla somma di tutte le facce del secondo come una faccia qualunque dell'uno sta alla faccia omologa dell' altro, ovvero come il quadrato di uno spigolo del primo sta al quadrato di uno spigolo omologo del secondo. Dunque le superficie dei poliedri simili stanno fra loro come i quadrati degli spigoli omologhi.

PROPOSIZIONE LXXVIII — *TEOREMA.*

178. *I poliedri simili stanno fra loro come i cubi degli spigoli omologhi* (fig. 40).

Dim. Si considerino in primo luogo le due piramidi triangolari simili SABC, *sabc*. Or due piramidi stanno fra loro in ragion composta dalla ragione delle basi ABC, *abc*, e dalla ragione delle altezze SO, *so*. Ma le basi essendo simili stanno fra loro come i quadrati de' lati omologhi, e questi lati sono proporzionali alle altezze (n. 100), dunque le due piramidi sono in ragion triplicata de' lati omologhi, ovvero come i cubi di questi lati.

Ciò premesso, passiamo a considerare due poliedri simili qualunque (fig. 32), che si potranno concepire divisi in un medesimo numero di piramidi triangolari simili rispettivamente e similmente disposte. Ciascuna delle piramidi del primo poliedro, per esempio; SABC starà alla sua omologa *sabc* nell' altro, come il cubo di uno dei suoi spigoli AB sta al cubo dello spigolo omologo *ab* dall' altra piramide, ma tutti questi spigoli sono nei due poliedri nel medesimo rapporto, poichè sono necessariamente o gli spigoli omologhi dei poliedri proposti, o le diagonali omologhe delle loro facce omologhe, o infine le diagonali omologhe interne, per conseguenza i loro cubi formeranno una serie di rapporti uguali, e questi rapporti essendo uguali a quelli delle piramidi, si concluderà che questi ultimi rapporti sono uguali fra loro. Laonde la somma delle piramidi costituenti il primo poliedro starà alla somma delle piramidi costituenti il secondo, come una qualunque piramide SABC dell' uno sta alla corrispondente piramide *sabc* dell' altro, ovvero come il cubo di uno spigolo omologho del primo poliedro sta al cubo dello spigolo omologo del secondo. Mettendo in luogo delle piramidi i poliedri da esse composti, ne risulterà che i poliedri simili stanno fra loro come i cubi dei lati omologhi.

CAPITOLO V.

DEI POLIEDRI SIMMETRICI

179. Per essere uguali due piramidi triangolari non basta che abbiano le loro facce uguali ciascuna a ciascuna, ma si richiede ancora che queste facce sieno disposte nello stesso ordine; poichè se fossero disposte in ordine inverso non potrebbero affatto coincidere, stante la simmetria degli angoli solidi. Conviene adunque considerare le figure solide, nella costituzione delle quali entrano gli angoli solidi simmetrici.

PROPOSIZIONE LXXIX — *TEOREMA.*

180. *Se due piramidi triangolari, che hanno le facce rispettivamente eguali, ma disposte in ordine inverso, sono situate in modo che due facce eguali coincidano, il piano della faccia comune sarà perpendicolare alla retta congiungente i vertici opposti, e la dividerà in due parti eguali* (fig. 41).

Dim Siano SABC, e S′ABC le due piramidi triangolari proposte: sia O il punto di mezzo della retta SS′ che unisce i vertici opposti alla base comune ABC; si conducano le rette AO, BO, CO. Essendo AS=AS′, il triangolo SAS′ sarà isoscele, e per conseguenza la retta AO è perpendicolare alla retta SS′. Parimente essendo BS = BS′, e CS=CS′, le rette BO, e CO sono perpendicolari a SS′. Dunque (n° 13) le tre rette AO, BO, CO si trovano nel piano che sarebbe prodotto dal rivolgimento dell' angolo retto SOC intorno al lato SO supposto immobile; ma questo piano contiene i tre punti A, B, C; dunque esso è il piano della faccia comune ABC.

181. *Scolio.* Dalla proposizione precedente è derivato che due piramidi triangolari si dicono *simmetriche* quando hanno le loro facce uguali ciascuna a ciascuna disposte in ordine inverso; dappoichè possono essere situate simmetricamente rispetto a un medesimo piano cioè in modo che i vertici degli angoli solidi omologhi sono situati a distanze uguali dal piano accennato, sopra una medesima retta perpendicolare a questo piano.

PROPOSIZIONE LXXX — *TEOREMA.*

182. *Due piramidi triangolari simmetriche hanno gli angoli diedri omologhi rispettivamente uguali, e gli angoli triedri omologhi simmetrici* (fig. 42).

Dim. Siano le due piramidi simmetriche SABC, *sabc* nelle quali sia la faccia SBA=*sba*, SBC=*sbc*, SCA=*sca*, e CBA=*cba*.

Essendo uguali le facce omologhe, gli angoli piani omologhi di

queste facce saranno rispettivamente uguali; e gli angoli triedri omologhi saranno composti di angoli piani rispettivamente uguali; per conseguenza (n° 70) l'angolo diedro di due facce contigue qualunque in una delle piramidi proposte sarà uguale all'angolo diedro delle facce omologhe nell'altra: ma queste facce sono disposte in ordine inverso, dunque gli angoli solidi omologhi saranno simmetrici.

PROPOSIZIONE LXXXI — *TEOREMA*.

183. *Una piramide triangolare non può avere che una sola simmetrica* (fig. 42).

Dim. Infatti, se si voglia formare una piramide simmetrica alla piramide SABC, vi dovrà essere sempre un angolo triedro formato da tre angoli piani BSA, BSC, ASC disposti in ordine inverso a quello, in cui sono disposti nella piramide SABC. Or si è dimostrato (n° 76) che questi tre angoli non si possono disporre che in due soli modi diversi, dunque le tre facce BSA, BSC, ASC non si possono disporre che in due soli modi differenti: ma quando queste facce si saranno riunite in un punto per formare l'angolo simmetrico all'angolo S, la quarta faccia trovasi determinata, dunque non può esservi che una sola piramide *sacb* simmetrica alla piramide SABC.

184. *Scolio.* Le proposizioni dimostrate nei paragrafi 113, 115, 116, e 117 si verificano ancora quando gli elementi rispettivamente eguali nelle due piramidi, si sono in esse inversamente disposti, solamente in vece di dire che le piramidi sono *uguali*, si dirà che sono *simmetriche*; e così si avranno diversi criterj per giudicare della simmetria delle piramidi triangolari. Infatti, se si suppone costrutta una piramide, simmetrica ad una delle due piramidi proposte, essa in virtù delle proposizioni sopraccennate dovrà risultare uguale all'altra piramide proposta; e però le due piramidi proposte saranno simmetriche fra loro.

PROPOSIZIONE LXXXII — *TEOREMA*.

185. *Se da tutti i vertici di un poliedro, decomposto in piramidi triangolari, si abbassino delle rette perpendicolari ad un medesimo piano, e si prolunghino al di là di questo piano di quantità uguali ad esse medesime, le estremità di queste perpendicolari saranno i vertici di un nuovo poliedro, che potrà essere decomposto in un medesimo numero di piramidi triangolari simmetriche a quelle del primo ed inversamente disposte* (fig. 43).

Dim. Sia S il vertice di tutte le piramidi costituenti il poliedro proposto; A, B, C, D, ecc. dinotino differenti vertici del poliedro medesimo; ed *s*, *a*, *b*, *c*, *d*, ecc. i punti corrispondenti del secondo poliedro determinati nel modo sopraccennato. Finalmente siano M e N, i punti di mezzo delle rette S*s*, e B*b*, vale a dire i

piedi di queste perpendicolari nel piano PQ, su cui sono state abbassate.

Le rette Ss, e Bb, essendo perpendicolari a un medesimo piano PQ, sono parallele fra loro, e per conseguenza sono situate in un medesimo piano; inoltre sono perpendicolari alla retta MN che unisce i loro piedi nel piano PQ; perciò immaginando che il trapezio bs MN giri intorno alla retta MN, esso potrà combaciare col trapezio BSMN, e però si avrà $SB=sb$. Nello stesso modo si dimostrerà che $SA=sa$, $SC=sc$, $AB=ab$, $BC=bc$; e per conseguenza le due piramidi triangolari SABC, $sabc$, avranno le facce uguali ciascuna a ciascuna; ma queste sono inversamente disposte, dunque le piramidi accennate sono simmetriche fra loro. Similmente si potrà dimostrare che le piramidi triangolari SACD, $sacd$ sono simmetriche, e così di seguito. Dunque i due poliedri sono composti di un medesimo numero di piramidi triangolari simmetriche rispettivamente; e da un' altra parte è manifesto che queste piramidi si trovano inversamente disposte nei due poliedri. Infatti per veder ciò chiaramente basta osservare la fig. 44, dove i due poliedri sono situati l' uno accanto all' altro.

PROPOSIZIONE LXXXIII — *TEOREMA*.

186. *Reciprocamente, due poliedri composti di un medesimo numero di piramidi triangolari simmetriche inversamente disposte, possono essere situati in modo che le rette, le quali uniscono i vertici omologhi sieno divise in due parti uguali da un medesimo piano perpendicolare a tutte queste rette* (fig. 44).

Dim. Sieno S, s i due poliedri proposti. Da tutti i vertici del poliedro S si abbassino delle perpendicolari sopra un piano qualunque, le quali si prolunghino al di sotto di questo piano di quantità uguali ad esse medesime, si formerà un nuovo poliedro, che chiameremo S'. I poliedri S e S' in virtù della proposizione precedente saranno composti di un medesimo numero di piramidi triangolari simmetriche inversamente disposte. Ma i due poliedri proposti S, s sono anch' essi per supposizione composti di un medesimo numero di piramidi triangolari simmetriche inversamente disposte, e da un' altra parte una piramide triangolare non può aver che una sola simmetrica (n° 183), dunque i poliedri s, e S' sono composti di un medesimo numero di piramidi triangolari uguali ciascuna a ciascuna, e similmente disposte; e per conseguenza questi poliedri sono uguali fra loro (n° 122).

Da ciò si deduce che il poliedro s può esser soprapposto al poliedro S', ed in questa situazione del poliedro s rispetto a S, il piano sopra nominato dividerà in due parti uguali tutte le rette che uniscono i loro vertici omologhi, e sarà perpendicolare a queste medesime rette.

187. *Scolio* I. Dalla proposizione precedente è derivato che due

poliedri son detti *simmetrici* fra loro quando si possono decomporre in un medesimo numero di piramidi triangolari simmetriche ed inversamente disposte; dappoichè possono sempre essere situati simmetricamente rispetto a un medesimo piano. Quindi il Legendre, che fu primo a parlare dei poliedri simmetrici, non li considera se non relativamente alla posizione che possono avere rispetto ad un medesimo piano.

Infatti definisce i poliedri simmetrici dicendo esser quelli che avendo una base comune, sono costrutti similmente l' uno al di sopra del piano di questa base, l' altro al di sotto, con questa condizione che i vertici degli angoli solidi omologhi siano situati ad eguali distanze dal piano della base, sopra una medesima retta perpendicolare a questo piano.

Partendo da questa definizione il lodato geometra ha dato alcune proposizioni intorno ai poliedri simmetrici, ma sembra con tale procedimento rimanga nascosto il cammino da esso seguito per arrivare ad una sì bella scoperta.

188. *Scolio*. II. La proposizione precedente prova che un poliedro non può avere che un solo simmetrico, e la proposizione (n° 185) offre il mezzo di costruire un poliedro simmetrico ad un poliedro dato.

PROPOSIZIONE LXXXIV — *TEOREMA*.

189. *Due poliedri simmetrici hanno le facce omologhe rispettivamente uguali, gli angoli diedri omologhi essi pure rispettivamente uguali, e gli angoli solidi omologhi simmetrici* (fig. 44).

Dim. Sieno SABC, SACD, ecc, le piramidi costituenti uno dei poliedri proposti, e *sabc*, *sacd*, ecc. le piramidi omologhe costituenti l'altro poliedro.

1° È manifesto che le facce omologhe dei due poliedri sono composte di facce omologhe ed uguali delle piramidi costituenti, e per conseguenza le facce omologhe dei due poliedri simmetrici sono uguali.

2° Due angoli diedri omologhi dei due poliedri sono angoli diedri omologhi, come AB *ab* delle piramidi costituenti: o sono composti di un medesimo numero di angoli diedri omologhi delle piramidi medesime, come avviene per gli angoli diedri omologhi CA. *ca*, che sono composti degli angoli diedri SCAB, SCAD, *scab*, *scad*. In ambedue i casi gli angoli diedri omologhi dei due poliedri saranno uguali.

3° Finalmente gli angoli solidi omologhi dei due poliedri sono composti degli angoli triedri omologhi delle piramidi costituenti, come può vedersi negli angoli solidi, A, ed *a*, che sono composti degli angoli triedri ASBC, ASCD, *asbc*, *ascd* omologhi, e disposti in ordine inverso, perchè queste stesse piramidi sono disposte inversamente nei due poliedri. Ma gli angoli

triedri accennati sono simmetrici, dunque lo saranno ancora solidi omologhi dei due poliedri.

PROPOSIZIONE LXXXV — *TEOREMA.*

190. *Due poliedri sono simmetrici quando hanno le facce rispettivamente uguali, disposte in ordine inverso, e gli angoli diedri omologhi essi pure rispettivamente uguali* (fig. 44).

Dim. Siano S, *s* i due poliedri proposti, e supponiamo che siasi costrutto un terzo poliedro S' simmetrico al poliedro S; esso avrà in questo poliedro (n. 199) gli angoli diedri omologhi eguali, e le facce omologhe eguali ed inversamente disposte. Per conseguenza i poliedri S', s_1 avranno gli angoli diedri rispettivamente eguali, e le facce omologhe eguali e similmente disposte, e perciò saranno eguali (n. 124). E poichè i poliedri S, S' sono simmetrici, lo saranno pure i poliedri proposti S, *s*.

PROPOSIZIONE LXXXVI — *TEOREMA.*

191. *Due prismi sono simmetrici quando hanno un angolo solido simmetrico compreso fra facce omologhe uguali ciascuna a ciascuna* (fig. 29).

Dim. Supponiamo che nei due prismi CF, *cf* sia l'angolo triedro A simmetrico all' angolo triedro *a*, la faccia ABD = *abd*, AK = *ag*, ed AG = *ak*. Se si costruisce un terzo prisma, che chiameremo C'F', simmetrico al prisma CF, questi due prismi avranno le facce omologhe rispettivamente uguali, e gli angoli solidi omologhi simmetrici fra loro (n° 188). Dunque i due prismi C'F', e *cf* avranno un angolo solido uguale compreso tra facce rispettivamente uguali; perciò saranno uguali (n. 119), ed essendo simmetrici i prismi CF, C'F', lo saranno pure i prismi proposti CF, *cf*.

ROPOSIZIONE LXXXVII — *TEOREMA.*

192. *Il piano che passa per le diagonali corrispondenti di due facce opposte di un parallelepido, lo divide in due prismi triangolari simmetrici fra loro* (fig. 30).

Dim. Infatti i due prismi triangolari ABDEFH, BCDFGE hanno le facce AE, CF uguali come facce opposte del parallelepipedo; hanno pure le facce uguali DH, CE per la stessa ragione, ed è poi il triangolo ABD uguale al triangolo EGF, dunque i due prismi accennati hanno gli angoli solidi A, e G compresi tra facce omologhe rispettivamente uguali; ma questi angoli solidi sono simmetrici (n° 107), dunque (n° 191) i due prismi sono simmetrici fra loro

PROPOSIZIONE LXXXVIII — *TEOREMA.*

193. *Due poliedri simmetrici sono equivalenti fra loro* (fig. 41).

Dim. Infatti, 1.° Due piramidi triangolari simmetriche SABC, e S'ABC sono equivalenti, poichè hanno una medesima base ABC ed uguali altezze SO, S'O.

2.° Due poliedri simmetrici sono composti di un medesimo numero di piramidi triangolari simmetriche, dunque essendo equivalenti le piramidi accennate, saranno pure equivalenti i poliedri simmetrici.

194. *Scolio.* Apparisce dal teorema precedente che i poliedri simmetrici costituiscono un genere intermedio fra i poliedri uguali, ed i poliedri equivalenti; il che non avviene nelle figure piane rettilinee, dove fra l'uguaglianza e l'equivalenza di queste figure non esiste alcuno stato intermedio. Una siffatta dottrina fu totalmente ignota agli antichi geometri, i quali perciò hanno a noi tramandata una teorica imperfetta dei poliedri.

CAPITOLO VI.

DEI POLIEDRI REGOLARI.

195. Un poliedro dicesi *regolare* quando tutte le facce sono poligoni regolari, uguali, e tutti i suoi angoli solidi sono pure uguali fra loro.

196. Or il più semplice di tutti i poligoni regolari è il triangolo equilatero, di cui ciascun angolo equivale a due terzi di un angolo retto: se dunque si riunissero più triangoli equilateri per formare un angolo solido, non se ne potrebbero adoperare che tre, quattro, o cinque; dappoichè sei dei loro angoli piani riuniti equivalgono a sei volte due terzi di un angolo retto, ovvero a quattro angoli retti, e perciò non possono formare un angolo solido (n. 61). Con più ragione non se ne potrebbero prendere più di sei. Laonde non possono esistere che tre specie di poliedri regolari con facce triangolari.

197. Dopo il triangolo equilatero viene il quadrato, di cui ciascun angolo è retto. Se dunque si prendano più quadrati per formare un angolo solido, non se ne potranno adoperare che tre, e per conseguenza non può esistere che un solo poliedro con facce quadrate.

198. Quanto al pentagono regolare, ciascuno dei suoi angoli equivale a sei quinti di un angolo retto, onde non si potrebbero adoperare più di tre degli angoli accennati per formare un angolo solido. Quindi un solo poliedro regolare può esistere con facce pentagonali.

199. L'angolo di un esagono regolare vale quattro terzi di un angolo retto, tre dei quali fanno quattro retti; e perciò non possono formare un angolo solido. Dunque non può esistere nessun poliedro regolare con facce esagonali. Similmente non può esistere alcun po-

liedro con facce ettagonali, ottagonali, ecc., perchè ciascun angolo dell'ettagono regolare, dell'ottagono regolare, e di tutti gli altri poligoni regolari di maggior numero di lati è maggiore di quello dell' esagono regolare.

200 Dalle cose precedenti si deduce che possono esistere soltanto cinque poliedri regolari, e sono.

1. Il *tetraedro regolare*, *o piramide triangolare regolare*, formata da quattro triangoli equilateri uguali.

2. L' *esaedro regolare*, o *cubo*, formato da sei quadrati uguali.

3 L' *ottaedro regolare*, formato da otto triangoli equilateri uguali.

4. Il *dodecaedro regolare*, formato da dodici pentagoni regolari uguali.

5. L' *icosaedro regolare*, formato da venti triangoli equilateri uguali.

201. I geometri si sono occupati a dare le costruzioni di questi poliedri; ma siccome non si parla di essi negli elementi, così rimettiamo chi volesse conoscerle al Lib. XIII degli Elementi di Euclide, alla Geometria Solida del Caravelli, ad una Appendice di quella del Legendre, ecc. Qui ci limiteremo ad osservare che gli antichi geometri davano specialmente il nome di *tetraedro*, *esaedro*, *ottaedro dodecaedro*, *icosaedro* ai cinque poliedri regolari, perchè non si sono occupati dei poliedri in generale, ma delle piramidi, dei prismi, e de' poliedri regolari.

CAPITOLO VII.

DELLA MISURA DELLE SUPERFICIE DE' POLIEDRI.

202. La superficie di un poliedro qualunque essendo composta di poligoni, che si sanno misurare, si avrà la misura della superficie totale di esso poliedro con fare la somma delle aje di tutte le sue facce. Quindi ci limiteremo a dare in questo luogo la misura della superficie laterale o convessa di un prisma, e quella della piramide regolare; non solo perchè siffatte misure possono ammettere una enunciazione particolare, ma anche perchè si dovrà farne uso in appresso.

PROPOSIZIONE LXXXIX — *TEOREMA*

203. *La superficie laterale o convessa di un prisma qualunque ha per misura il prodotto di uno de' suoi spigoli laterali per lo perimetro di una sezione perpendicolare a questo spigolo* (fig. 29).

Dim. Infatti, essendo tutti gli spigoli del prisma *abck* eguali e paralleli fra loro, si potranno considerare come basi de' parallelogrammi, che compongono la superficie laterale del prisma medesimo. Quindi se si taglia il prisma con un piano perpendicolare agli

spigoli, il perimetro della sezione sarà la somma delle altezze de' parallelogrammi accennati. Ma ogni parallelogrammo ha per misura il prodotto della base per l'altezza, dunque il perimetro della sezione *lmnq* moltiplicato per uno degli spigoli laterali del prisma sarà la misura della superficie laterale di questo prisma.

204. *Corollario* I. Quando il prisma è retto, tutt' i suoi spigoli laterali sono perpendicolari alla base; per conseguenza

La superficie laterale o convessa di un prisma retto ha per misura il prodotto del perimetro della base per l' altezza.

205. *Corollario* II. La superficie laterale di un prisma qualunque è equivalente a quella di un rettangolo, che avesse per base una linea retta eguale al perimetro della sezione *lmnq*, e per altezza uno degli spigoli laterali.

206. *Scolio.* È manifesto che se si volesse avere la misura della superficie totale di un prisma, basterebbe aggiungere le superficie delle due basi alla superficie laterale.

PROPOSIZIONE XC — *TEOREMA*

207. *La superficie laterale o convessa della piramide regolare ha per misura il prodotto del perimetro della sua base per la metà dell' apotema* (fig. 49).

Dim. Sia SO l' altezza dolla piramide regolare SABD. Essendo il punto O il centro del poligono regolare ABCDE (n° 90), le oblique SA, SB, SC, ecc. saranno egualmente distanti dalla perpendicolare SO; e però saranno isosceli ed eguali i triangoli ASB, BSC, CSD, ecc., che compongono la superficie convessa della piramide regolare. Ma ciascuno di questi triangoli, come ASB, ha per misura il prodotto della sua base AB per la metà della sua altezza SH, che è l'apotema della piramide, dunque la superficie convessa di questa avrà per misura il prodotto del perimetro ABCDE della base per la metà dell' apotema Sh.

208. *Scolio.* I. Si può ora vedere facilmente che se si taglia la piramide regolare SABD con un piano *abce* parallelo alla base, la superficie convessa del tronco di piramide regolare, che si compone de' trapezj Ab. Bc. Cd, ecc. avrà per misura la porzione Hh dell' apotema SH moltiplicato per la semi-somma de' perimetri delle due basi del tronco piramidale.

209. *Scolio* II. La piramide di cui è parola, è stata impropriamente chiamata *piramide regolare.*

Infatti, dal capitolo precedente si deduce che la piramide regolare propriamente detta è il tetraedro regolare. Or la piramide accennata può esser un tetraedro regolare, ma può essere ancora un solido assai diverso da questo, sia che abbia per base un triangolo equilatero, sia che abbia per base qualsivoglia altro poligono regolare. La piramide regolare non è che una specie di piramide retta; denominazione da noi introdotta per conservare l'analogia fra la teo-

rica delle piramidi e quella de' prismi. La necessità di una siffatta denominazione apparisce qui manifesta, perchè con essa sola si potrebbe togliere dalla scienza l' equivoco che nasce dal chiamare piramide regolare un poliedro che non è regolare, se non in un solo caso particolarissimo, mentre se si considerasse come una specie di piramide retta, svanirebbe ogni equivoco.

LIBRO III.

DEI TRE CORPI ROTONDI, E DEI TRIANGOLI SFERICI

CAPITOLO I.

NOZIONI E DEFINIZIONI PRELIMINARI.

210. I solidi, de' quali fin qui si è parlato, sono terminati da superficie piane; ma oltre questi solidi la geometria elementare ne considera tre altri, cioè il *cilindro retto*, il *cono retto*, e la *sfera,* ai quali si da il nome di *corpi rotondi*, perchè i due primi sono terminati da superficie curve e da superficie piane, e l' ultima da una sola superficie curva.

211. Il *cilindro retto* (fig. 45) è il solido prodotto dalla rotazione di un rettangolo ABCD intorno ad un suo lato immobile AB. Questo lato chiamasi *asse* del cilindro; i cerchi DHE, CGF descritti dai lati AD, BC ne sono le *basi*, e la linea CD, che genera la *superficie curva* del cilindro, dicesi *lato*. Finalmente l' *altezza* del cilindro è la distanza dei piani paralleli delle due basi: essa è uguale all'asse, o al lato del cilindro medesimo.

212. Da questa genesi del cilindro ne consegue che ogni sezione fatta da un piano che passa per l'asse, è un rettangolo come CDEF doppio del rettangolo generatore ABCD, e che ogni sezione PRQ fatta da un piano perpendicolare all'asse AB, è un cerchio uguale a ciascuna base. Infatti, nel rivolgimento del rettangolo ABCD intorno ad AB, la retta OQ perpendicolare ad AB descrive un cerchio uguale alla base.

213. Due cilindri retti si dicono *simili* allorchè sono prodotti dalle rotazioni di due rettangoli simili ABCD, *abcd* intorno a lati omologhi AB, *ab*; cioè quando i loro assi sono proporzionali ai raggi delle loro basi.

214. Il *cono retto* (fig. 46) è il solido, che vien generato dal rivolgimento di un triangolo rettangolo SAO intorno ad un cateto immobile SO. L'altro cateto AO genera il cerchio ANB, che dicesi *base* del cono. Il punto S si chiama *vertice* del cono; il cateto SO che unisce il vertice col centro della base è l'*asse* del cono; e finalmente si dà il nome di *lato*, o *apotema* alla linea SA che descrive la *superficie curva* del cono medesimo.

215. Apparisce da siffatta genesi del cono che ogni sezione fatta da un piano, il quale passa per l' asse, è un triangolo isoscele come ASB doppio del triangolo generatore SOB; e che ogni sezione EMD perpendicolare all' asse è un cerchio.

216. Due coni retti sono detti *simili*, allorchè sono prodotti dalle rotazioni di due triangoli rettangoli simili ASO, *aso* intorno a cateti omologhi, cioè quando i loro assi sono proporzionali ai raggi delle loro basi.

217. Il *cono troncato*, *o tronco di cono* (fig. 47) è la porzione di cono compresa fra la base ed un piano ad essa parallelo. Quindi il tronco di cono può considerarsi come prodotto dalla rotazione di un trapezio AODH, di cui gli angoli O, e D sono retti, intorno al lato immobile OD. Questo lato dicesi *asse* o *altezza* del tronco; e si chiamano poi *basi* i cerchi descritti dalle rette OA, DH; e finalmente alla linea AH si dà il nome di *lato del tronco di cono*.

218. I tronchi di due coni retti si dicono *simili* quando sono prodotti da trapezj simili; cioè quando i loro assi sono proporzionali ai raggi delle basi corrispondenti.

219. La *sfera* (fig. 48) è il solido generato dal rivolgimento di un semicerchio ADB intorno ad un suo diametro AB. Quindi la *superficie sferica* che vien prodotta dalla rotazione della semicirconferenza ADB, ha tutti i suoi punti equidistanti dal centro O del semicerchio generatore, che dicesi *centro della sfera*. La distanza del centro della sfera a un punto qualunque della sua superficie si chiama *raggio della sfera*. È manifesto che tutti i raggi di una sfera sono uguali fra loro, e che tutti i diametri sono uguali e doppj dei raggi.

220. Dalla genesi della sfera risulta ancora che ogni sezione fatta da un piano, il quale passa pel centro, è un cerchio, di cui il raggio è il raggio della sfera. Infatti tutti i punti come A, L, B comuni al piano accennato ed alla superficie sferica si trovano ad una eguale distanza del punto O; per conseguenza la sezione medesima ALB è un cerchio che ha per diametro il diametro della sfera. In generale ogni sezione MKN fatta con un piano qualunque è un cerchio; poichè se dal centro O si abbassi sul piano MKN la perpendicolare OE, le oblique OM, OK, ON, ecc, essendo uguali come raggi della sfera saranno equidistanti dal piede E della perpendicolare, e però le rette EM, EK, EN, ecc. saranno uguali fra loro e la sezione MKN sarà un cerchio.

221. Ogni circolo della sfera che passa pel centro di essa dicesi *circolo massimo*; chiamasi *circolo minore* quello che non passa pel centro della sfera. È evidente che i circoli massimi sono uguali fra loro, poichè hanno il medesimo centro ed il medesimo raggio della sfera.

222. Due circoli massimi si tagliano sempre in due parti uguali, perchè la loro comune intersezione, passando pel centro è un diametro. Quindi le loro circonferenze s' intersegano alla distanza di 180 gradi.

223. Ogni circolo massimo divide la sfera e la sua superficie in

due parti uguali ; dappoichè un circolo massimo rivolgendosi intorno al proprio diametro deve produrre la sfera medesima. La metà di una sfera dicesi *emisfero*.

224. Il centro di un circolo minore, e quello della sfera sono in una medesima retta perpendicolare al piano del circolo minore.

225. I circoli minori sono tanto più piccoli quanto più si allontanano dal centro della sfera ; perchè più grande è quella distanza, e più piccola diviene la corda, come MN, che è il diametro del circolo minore MKN.

226. Per due punti dati sopra la superficie della sfera può sempre passare un arco di circolo massimo ; poichè i due punti dati ed il centro della sfera sono tre punti che determinano la posizione di un piano,

Nondimeno se i due punti accennati fossero alle estremità d' un diametro, allora questi due punti ed il centro sarebbero in linea retta, e vi sarebbero infiniti circoli massimi che potrebbero passare per i due punti dati.

227. Un piano indefinito che ha un solo punto comune colla superficie di una sfera dicesi *piano tangente* della sfera medesima. Esso può considerarsi come prodotto dal rivolgimento della tangente AR al cerchio generatore ADB intorno al diametro AB. Quindi un piano perpendicolare alla estremità di un diametro della sfera è tangente a questa sfera ; e reciprocamente ogni piano tangente alla sfera è perpendicolare all' estremità del diametro che passa pel punto di contatto,

228. Si dice *zona* la parte della superficie della sfera compresa fra due piani paralleli. I circoli che rappresentano le sezioni dei piani medesimi colla sfera si chiamano *basi* della zona. Se uno di questi piani è tangente alla sfera, allora la zona ha una base, e con altro nome dicesi *callotta*.

229. Una zona a due basi MDLKCN può considerarsi come generata dal rivolgimento di un arco DM intorno al diametro AB che passa per i centri delle due basi. Una zona ad una base AMKN si può considerare come prodotta dal rivolgimento di un arco AM intorno al diametro AB che passa per una delle sue estremità.

230. L' *altezza* di una zona è la distanza dei due piani paralleli, che sono le basi della zona.

231. Si chiama *segmento sferico* la porzione della sfera compresa fra due piani paralleli. Le sezioni di questi piani colla sfera sono le *basi* del segmento medesimo. Se uno dei piani paralelli fosse tangente alla sfera, allora il segmento sferico avrebbe una sola base.

232. L' *altezza* d' un segmento sferico è la distanza dei due piani paralleli che formano le basi del segmento.

233. Dicesi *settore sferico* la porzione della sfera compresa fra una callotta, ed una superficie conica, che ha per base il circolo base della callotta, e per vertice il centro della sfera.

Un settore sferico può considerarsi come prodotto dalla rotazione di un settore circolare KAO intorno ad uno dei raggi OA, OK.

Finalmente si chiama *fuso* la parte della superficie della sfera racchiusa fra due semicircoli massimi che terminano a un diametro comune, e si dà il nome di *cuneo* o *unghia sferica* alla parte della sfera compresa fra il fuso e le sue due facce.

CAPITOLO II.

DELLA MISURA DELLE SUPERFICIE DE' TRE CORPI ROTONDI, E DEI RAPPORTI CHE NE DERIVANO.

234 La teorica de' tre corpi rotondi riducesi nella geometria elementare quasi tutta alla misura delle loro superficie, de' loro volumi, ed ai rapporti che ne derivano. Quindi è necessario che si conosca il principio su cui stabiliremo una siffatta misura, dappoichè i geometri nell'assegnarla hanno seguito diversi metodi, secondochè hanno giudicato essere l'uno più esatto, o più facile dell'altro. Or il principio che seguiremo consiste nel considerare il cerchio come un poligono regolare di un numero infinito di lati; e per conseguenza il cilindro retto come un prisma retto di un numero infinito di facce, il cono retto come una piramide regolare di un numero infinito di facce, e la sfera come un poliedro di un numero infinito di facce. Questa maniera di considerare il cerchio, ed i tre corpi rotondi ha il prezioso vantaggio di abbreviare le dimostrazioni, che andiamo ad esporre de' così detti *Teoremi di Archimede* intorno al cilindro, al cono, ed alla sfera: e di farle concepire e ritenere facilmente, perchè s' immedesimano, per così dire, col metodo con cui i teoremi accennati vennero scoperti da quel sommo geometra dell' antichità, il quale li dimostrò poi in altra guisa per adattarsi alla maniera di pensare de' geometri del suo tempo, i quali non si permettevano mai di adoperare la considerazione dell' infinito nelle loro dimostrazioni. E si noti ancora che quando quella maniera di considerare il cerchio, ed i tre corpi rotondi venga adoperata come si conviene e non s' appoggi a ragionamenti vaghi ed arbitrarii, essa può riescire tanto esatta quanto qualsivoglia altro metodo, che si volesse mettere in suo luogo.

PROPOSIZIONE XCI — *TEOREMA.*

235 *La superficie curva del cilindro retto ha per misura il prodotto della circonferenza della base per l' altezza* (fig. 45).

Dim. Sia il cilindro retto EHDF. Nella geometria piana si è dimostrato che il cerchio si può considerare come un poligono regolare di un numero infinito di lati; per conseguenza la base EHD del cilindro si potrà considerare come un poligono regolare di un numero infinito di lati. Quindi il cilindro medesimo potrà esser considerato come un prisma retto di un numero infinito di facce. Ma la superficie convessa del prisma retto ha per misura il pro-

dotto del perimetro della base per l'altezza (n° 204) dunque la superficie curva del cilindro retto dovrà aver per misura il prodotto della circonferenza della base per l'altezza ; che è quanto si doveva dimostrare.

236 *Corollario*. Da ciò si deduce che la superficie curva di un cilindro retto è uguale a quella di un rettangolo avente per base la circonferenza della base del cilindro, e per altezza quella del cilindro medesimo. Laonde tutto quello che nella geometria piana è stato dimostrato intorno ai rapporti di due rettangoli si può applicare alle superficie curve di due cilindri retti.

237. *Scolio* È manifesto che per avere la misura della superficie totale del cilindro retto, bisogna aggiungere alla misura della superficie curva quella delle due basi del cilindro medesimo.

PROPOSIZIONE XCII — *TEOREMA*.

238. *Le superficie curve di due cilindri simili stanno fra loro come i quadrati delle altezze, o come i quadrati dei raggi delle basi corrispondenti* (fig. 45).

Dim. Infatti, essendo nei cilindri simili (n° 213) gli assi o le altezze AB, *ab* proporzionali ai raggi delle basi AE, *ae*; ed essendo i raggi proporzionali alle circonferenze DEH, *deh*, ne risulta che queste saranno proporzionali alle altezze; e per conseguenza saranno simili i rettangoli che rappresentano le superficie curve de' due cilindri simili. Ma i rettangoli simili stanno come i quadrati dei lati omologhi, dunque le superficie curve de' due cilindri stanno come i quadrati delle altezze, ovvero come i quadrati de' raggi delle basi.

239. *Scolio*. Essendo i cerchi come i quadrati de' raggi, è evidente che le superficie totali di due cilindri simili stanno come i quadrati delle altezze, o de' raggi delle basi de' cilindri medesimi.

PROPOSISIONE XCIII — *TEOREMA*

140. *La superficie curva del cono retto ha per misura il prodotto della circonferenza della base per la metà del lato* (fig. 46).

Dim. Sia il cono retto SANB. Si è dimostrato nella geometria piana che il cerchio ANB si può considerare come un poligono regolare di un numero infinito di lati; per conseguenza il cono medesimo potrà considerarsi come una piramide regolare di un numero infinito di facce. Ma la superficie convessa della piramide regolare ha per misura il prodotto del perimetro della base per la metà dell'apotema (n ° 207), dunque la superficie curva del cono retto dovrà avere per misura la circonferenza della base per la metà del lato, il che si era proposto di dimostrare.

241. *Corollario* I. Da ciò si deduce che la superficie curva di un

cono retto è equivalente all' aja di un triangolo rettangolo, di cui un cateto rappresenta la circonferenza della base del cono, e l' altro il lato del cono medesimo. Quindi si potrà applicare alle superficie curve de' coni retti quanto si è dimostrato nella geometria piana intorno ai rapporti delle aje de' triangoli.

242. *Corollario.* II. Pel punto di mezzo E del lato SA si conduca un piano parallelo alla base del cono.

Le circonferenze ANB, EMD stanno come i raggi AO, EK: ma AO è doppio di EK, perchè SA è doppio di SE, dunque la circonferenza della base del cono è doppia di quella della sezione: e però

La superficie curva del cono retto ha ancora per misura il prodotto del suo lato per la circonferenza della sezione equidistante dal vertice e dalla base.

243. *Scolio.* È manifesto che la superficie totale del cono retto si ottiene aggiungendo alla superficie curva quella della base del cono medesimo.

PROPOSIZIONE XCIV — *TEOREMA.*

244. *Le superficie curve di due coni retti simili stanno come i quadrati delle altezze, o come i quadrati de' raggi delle basi corrispondenti* (fig. 46).

Dim. Perocchè, essendo le altezze SO, *so* proporzionali ai raggi AO, *ao*, (n° 216), saranno simili i triangoli rettangoli SAO, *sao*; e perciò i lati SA, *sa* saranno proporzionali ai raggi AO, *ao*, ovvero alle circonferenze ANB, *anb*. Quindi risulteranno simili i triangoli rettangoli che rappresentano le superficie curve dei due coni. Ma i triangoli simili stanno come i quadrati dei lati omologhi, dunque le superficie accennate stanno come i quadrati dei lati SA, *sa*, e per conseguenza come i quadrati delle altezze SO, *so*, ovvero dei raggi AO, *ao*.

PROPOSIZIONE XCV — *TEOREMA.*

245. *La superficie curva del tronco di cono retto ha per misura il prodotto del lato per la semi-somma delle circonferenze delle basi* (fig. 47).

Dim. Sia ANG un tronco di cono retto. Considerando le basi come poligoni regolari di un numero infinito di lati, il tronco proposto si potrà considerare come un tronco di piramide regolare a basi parallele di un numero infinito di facce. Ma la superficie convessa di questo tronco ha per misura il prodotto della semi somma de' perimetri delle basi per la porzione dell' apotema, che è compresa fra queste medesime basi (n° 208), dunque la superpcie curva del tronco di cono retto dovrà avere per misura il prodotto del suo lato

HA per la semisomma delle circonferenze delle basi ANB , HMG , come erasi proposto di dimostrare.

246. *Scolio.* Nel trapezio AHGB la linea EF , che unisce i punti di mezzo dei lati non paralleli, è uguale alla semi-somma delle basi AB , HG del trapezio medesimo, come è stato dimostrato nella geometria piana. Ma le circonferenze de' cerchi stanno come i diametri , dunque la circonferenza ERF è uguale alla semi-somma delle circonferenze ANB, HMG , e per conseguenza

La superficie curva del tronco di cono retto ha ancora per misura il prodotto del suo lato per la circonferenza del cerchio equidistante dalle due basi.

247. *Definizione.* Si dice *porzione di poligono regolare* la figura terminata da una serie di corde uguali , che sono iscritte in un arco di cerchio , da una estremità all' altra del medesimo arco.

248. *Scolio.* La figura accennata ha ricevuto un tal nome , perchè ha le proprietà principali de' poligoni regolari. Infatti, essa ha i lati eguali , e gli angoli eguali come iscritti in eguali segmenti di cerchio ; e di più può esser iscritta e circoscritta al cerchio , come apparisce da ciò che si è dimostrato nella geometria piana intorno ai poligoni iscritti e circoscritti al cerchio.

Purtuttavolta una porzione di poligono regolare non fa parte di un polig no regolare propriamente detto , se non quando l' arco sotteso da uno dei suoi lati è una parte aliquota della circonferenza.

È poi manifesto che per iscrivere in un arco dato una porzione di poligono regolare , basta dividere siffatto arco in 2, 4 , 8, 16 , ec. parti eguali, ed unire con delle corde i punti di divisione.

PROPOSIZIONE XCVI — *TEOREMA.*

249. *Siano* AB , BC , CD, ecc. *più lati successivi di un poligono regolare* , O *il suo centro* , *ed* OI *il raggio del cerchio iscritto. Se si supponga che la porzione di poligono* ABCD *situata da una medesima parte dell' asse* FG *giri intorno a questo* , *la superficie del solido prodotto dalla rotazione del poligono avrà per misura la porzione dell' asse* MQ *moltiplicata per la circonferenza del cerchio iscritto* (fig. 50).

Dim: Dai punti A, B, C, D, si abbassino sull'asse le perpendicolari AM, BN, CP, DQ; e dal centro O si conducano sopra i lati AB, BC le perpendicolari OI, OL , che saranno raggi del cerchio iscritto: finalmente si tirino le rette AR, ed IH la prima parallela , e la seconda perpendicolare a MQ.

Ciò premesso, il trapezio ABMN girando intorno all' asse produce un tronco di cono retto , la cui superficie curva ha per misura il prodotto del lato AB per la circonferenza che ha per raggio IH (n° 246). Or Essendo simili i triangoli ABR ,IOH , perchè hanno i lati rispettivamente perpendicolari , si ha la proporzione.

AB: IO:: AR: IH

Ma IO è il raggio del cerchio iscritto, ed IH è il raggio del cerchio equidistante dalle due basi del tronco di cono retto; e di più le circonferenze stanno come i raggi, dunque sarà AB a circonferenza IO come AR a circonferenza IH, e per conseguenza il prodotto del lato AB per la circonferenza IH, sarà uguale al prodotto di AR, ovvero di MN, per circonferenza IO. Sicchè la superficie curva del tronco di cono descritta dal lato AB avrà per misura la circonferenza del cerchio iscritto per la porzione MN dell'asse.

Similmente si dimostra che la superficie curva del tronco di cono, o del cilindro generato dalla rotazione della figura BCPN intorno all'asse ha per misura il prodotto di NP per la circonferenza OL, ovvero OI, e lo stesso si potrà dire della superficie curva del tronco di cono, che vien prodotto dalla rotazione del trapezio CDQP. Quindi la somma di queste superficie avrà per misura il prodotto della porzione MQ dell'asse per la circonferenza del cerchio iscritto, il che erasi proposto di dimostrare.

250. *Corollario*. Se il poligono intero è di un numero pari di lati, l'asse FG passerà per due vertici opposti F, G di esso poligono, e la superficie descritta dal poligono FACG avrà per misura il prodotto dell'asse FG per la circonferenza del cerchio iscritto. Infatti, si potrà dimostrare come sopra che la superficie curva del cono descritto dal triangolo FAM nel suo rivolgimento intorno a l'asse, avrà per misura il prodotto di FM per la circonferenza KO del cerchio iscritto, e lo stesso si potrà dire della superficie curva del cono descritto dal triangolo DQG.

PROPOSIZIONE XCVII — *TEOREMA*.

251. *La superficie della sfera ha per misura il prodotto della circonferenza di un circolo massimo pel diametro* (fig. 50).

Dim. Sia FBDG il semi-perimetro di un poligono regolare di un numero pari di lati, ed OK il raggio del cerchio iscritto a questo poligono. Nella proposizione precedente si è dimostrato che rotando la figura EBDG intorno all'asse FG, la superficie del solido, che ne risulta, ha per misura il prodotto dell'asse per la circonferenza del cerchio iscritto. Ma nella geometria piana si è dimostrato che quando la figura FBDG è di un numero infinito di lati, essa si confonde col cerchio iscritto, dunque in tal caso il solido accennato si confonderà con la sfera, e l'asse FG col diametro ES della sfera medesima; e per conseguenza la superficie della sfera dovrà avere per misura il prodotto del diametro ES per la circonferenza di un circolo massimo; il che erasi proposto di dimostrare.

252. *Corollario* I. Un circolo massimo della sfera avendo per misura il prodotto della sua circonferenza per la metà del raggio; ed essendo il diametro quadruplo della metà del raggio, ne consegue, che

La superficie della sfera è quadrupla di un suo circolo massimo.

253. *Corollario* II. Dal corollario precedente si deduce che le superficie di due sfere qualunque stanno come i circoli massimi. E poichè i circoli stanno come i quadrati de' raggi, o de diametri, si conchiude che.

Le superficie delle sfere stanno fra loro come i quadrati de'rog-gi, o de diametri.

PROPOSIZIONE XCVIII — *TEOREMA*.

254. *La zona sferica ha per misura il prodotto della circonferenza di un circolo massimo per l'altezza di essa zona* (fig. 51).

Dim. Si consideri in primo luogo la zona ad una base, che vien prodotta dal rivolgimento dell'arco AC intorno al diametro AD.

Nell'arco AC s'iscriva una porzione di poligono regolare AMNPC. La superficie del solido generato dalla rotazione della figura AMNPC intorno al diametro AD ha per misura il prodotto di AF, altezza della zona, per la circonferenza del cerchio iscritto alla porzione di poligono regolare, il cui raggio è OI, ossia la perpendicolare abbassata dal centro O sulla corda AM (n° 249). Ma quando la figura AMNPC ha un numero infinito di lati, il suo perimetro si confonde coll'arco AC, la superficie del solido da esso descritto si confonde colla zona, ed il circolo iscritto col circolo massimo della sfera; dunque la zona descritta dall'arco AC deve avere per misura il prodotto della sua altezza AF per la circonferenza del circolo massimo ACD.

Passiamo in secondo luogo a considerare una zona qualunque a due basi, che vien descritta dal rivolgimento dell'arco BC (fig. 52) intorno al d ametro AD, su cui si abbassino le perpendicolari BE, CF dalle due estremità dell'arco medesimo.

La zona descritta dall'arco BC è la differenza delle due zone descritte dagli archi AC, AB. La prima di queste zone ha per misura il prodotto dell altezza AF per la circonferenza del circolo massimo ACD; la seconda ha per misura il prodotto dell'altezza AE per la stessa circonferenza; per conseguenza la zona descritta dall'arco BC dovrà avere per misura la sua altezza EF per la circonferenza del circolo ACD. Epperò ogni zona sferica ha per misura il prodotto della sua altezza per la circonferenza di un circolo massimo; il che si doveva dimostrare.

255. *Corollario*. Apparisce da questo teorema che

Due zone prese in una medesima sfera, o in sfere uguali, stanno fra loro come le loro altezze, ed una zona qualunque sta alla superficie della sfera come l'altezza di quella zona sta al diametro.

PROPOSIZIONE XCIX — *TEOREMA*.

256. *La zona sferica ad una base è equivalente al circolo, che ha per raggio la corda dell'arco generatore della zona medesima* (fig. 52).

Dim. Sia AB la corda dell'arco generatore della zona. La perpendicolare BE abbassata dal punto B sul diametro AD sarà il raggio del cerchio, che è la base della zona, ed AE sarà l'altezza della zona medesima.

Or essendo la corda AB media proprzionale fra il diametro AD, ed il segmento adiacente AE, dalla proprietà della proporzione continua si deduce che il diametro AD sta ad AE come il quadrato di AD al quadrato di AB. Quindi (n° 255) la superficie della sfera sta alla zona sferica ad una base come il quadrato di AD al quadrato di AB, ovvero come un circolo massimo al circolo che ha per diametro AB. Ma la superficie sferica è quadrupla di un suo circolo massimo, dunque ancora la zona sferica ad una base dovrà essere quadrupla del circolo che ha per diametro la corda AB dell'arco generatore; e però equivalente al circolo che ha per raggio la corda medesima.

CAPITOLO III.

DELLA MISURA DELLE SOLIDITA', O VOLUMI DEI TRE CORPI ROTONDI, E DEI RAPPORTI CHE NE DERIVANO.

257. S'abilita la misura delle superficie dei tre corpi rotondi si conosce subito la via da tenersi per arrivare alla misura dei loro volumi; nondimeno la misura del volume della sfera offre qualche difficoltà, allorchè si vuole determinarlo partendo dal principio fondamentale, cioè quello di considerare la sfera come un poliedro di un numero infinito di facce, senza deviare in certe forme di ragionamento vaghe ed inesatte, cui si dà impropriamente il nome di metodo degl'infinitamente piccoli.

PROPOSIZIONE C — *TEOREMA*.

258. *Il cilindro retto ha per misura il prodotto della sua base per la sua altezza.*

Dim. Infatti, considerando il cilindro retto come un prisma retto di un numero infinito di facce, la proposizione enunciata diviene evidente; dappoichè il prisma ha per misura il prodotto della sua base per la sua altezza.

259. *Corollario*. I. Ciò che altrove si è detto intorno ai rapporti di due prismi si applica ancora ai rapporti di due cilindri.

260. *Corollario* II. *I cilindri simili stanno come i cubi degli assi o dei diametri delle basi.*

Infatti, la ragione di due cilindri in generale è composta della ragione delle basi, e di quella delle altezze, ovvero della ragione dei quadrati de' diametri delle basi e della ragione delle altezze; ma quando i cilindri sono simili la ragione delle altezze è uguale a quella dei diametri, dunque i cilindri simili sono in ragion triplicata

delle loro altezze o dei diametri delle loro basi, ossia sono come i cubi delle altezze, o de' diametri medesimi, o anche dei raggi delle basi.

PROPOSIZIONE CI — *TEOREMA*.

261. *Il cono retto ha per misura il prodotto della base pel terzo dell'altezza.*

Dim. Infatti, il cono retto si può considerare come una piramide regolare di un numero infinito di facce; ma questa ha per misura il prodotto della base pel terzo dell'altezza, dunque il cono retto avrà ancora per misura il prodotto della sua base pel terzo della sua altezza.

262. *Corollario* I. Ciò che altrove si è dimostrato intorno ai rapporti delle piramidi fra loro, e delle piramidi paragonate ai prismi, si può applicare ai rapporti dei coni fra loro, e dei coni paragonati ai cilindri, fra i quali merita di essere ricordato il teorema dimostrato da Eudosso cioè che il cono retto è la terza parte del cilindro retto della stessa base e della stessa altezza.

263. *Corollario* II. I coni simili stanno come i cubi delle loro altezze, o come i cubi dei diametri delle loro basi. La dimostrazione è come quella fatta per i cilindri simili.

PROPOSIZIONE CII — *TEOREMA*.

264. *Il tronco di cono retto a basi parallele è uguale alla somma di tre coni, che hanno per altezza comune l'altezza del tronco, e per basi l'uno la base inferiore, l'altro la base superiore, ed il terzo una media proporzionale fra le due basi.*

Dim. Infatti, il tronco di cono retto a basi parallele si può considerare come un tronco di piramide regolare a basi parallele di un numero infinito di facce; ma il tronco di piramide equivale a tre piramidi che hanno le condizioni enunciate nella proposizione, dunque il tronco di cono equivale pure a tre coni che hanno le stesse condizioni.

265. *Corollario*. Da ciò ne segue che il tronco di cono retto si misura come il tronco di piramide.

PROPOSIZIONE CIII — *TEOREMA*.

266. *La sfera ha per misura il prodotto della sua superficie pel terzo del suo raggio* (fig. 53).

Dim. Sia A il centro della sfera; e per questo punto si faccia passare un piano ABK che tagli la sfera; indi nel circolo massimo risultante dalla senzione s'iscriva un poligono regolare, di cui un lato sia BK: si tirino i raggi BA, KA, ed al punto A s'innalzi sul piano ABK la perpendicolare AC che si prolunghi finchè incontri la su-

perficie sferica in un punto C. Ciò premesso, per i tre punti C, B, A si faccia passare un piano come pure per i tre punti C, K, A, ne risulteranno gli archi di cerchio massimo CB, CK, ciascuno de'quali sarà un quadrante. S'iscrivano in questi due quadranti due porzioni (n° 247) di poligoni regolari perfettamente uguali: si conducano le rette OS, FR; dai punti O, S si abbassino sopra AB, ed AK le perpendicolari OV, SQ, e si unisca VQ.

Essendo i quadrati CAB, CAK eguali fra loro, ed identiche le costruzioni in essi eseguite, è chiaro che sarà OV=SQ e VB=QK. Ma OV, SQ sono anche parallele perchè ambedue parallele ad AC dunque OVSQ è un parallelogrammo. Da un altra parte, poichè VB=QK, e quindi AV=AQ, anche BK sarà parallela a VQ; e però le rette BK, OS parallele alla terza VQ risulteranno parallele, ed il quadrilatero OSBK sarà una figura piana. Lo stesso si dimostrerà facilmente per qualunque altro quadrilatero iscritto FOSR, poichè in quanto al triang. lo CFR, esso è sempre in un piano. Se dunque si congiungano i punti O, S, F, R, col centro A della sfera si sarà iscritto nel solido BACK un poliedro composto di piramidi che hanno per basi i quadrilateri OBKS, OFRS...., ed il triangolo CFR, e per vertice comune il punto A. Facendo lo stesso per tutte le mezze ugne sferiche si troverà iscritto nella sfera un poliedro, il quale potrà avere un numero di facce illimitato. Infatti, a misura che si raddoppia il numero de' lati de' poligoni, dei quali più sopra si è parlato, si viene ancora a raddoppiare il numero delle facce del poliedro; e poichè un siffatto raddoppiamento non ha alcun limite, così diviene manifesto che il numero delle facce del poliedro iscritto alla sfera può farsi tanto grande che si vuole. Quindi, allorchè i poligoni accennati avranno un numero infinito di lati, ossia si confonderanno con i circoli massimi, il poliedro iscritto avrà un numero infinito di facce, e si confonderà colla sfera, la quale in conseguenza si può considerare come un poliedro di un numero infinito di facce, ciascuna delle quali potrà considerarsi come base di una piramide che ha il vertice al centro della sfera. Quindi la sfera è la riunione di una infinità di piramidi, delle quali le basi compongono la superficie sferica, e l'altezza di ciascuna è uguale al raggio. Ma ogni piramide ha per misura il prodotto della sua base pel terzo della sua altezza, dunque la sfera avrà per misura il prodotto della sua superficie pel terzo del suo raggio.

267. *Corollario* I. Dal teorema precedente si deduce che la sfera è equivalente ad un cono, di cui la base è il quadruplo di un cerchio massimo, e l'altezza è uguale al raggio della sfera.

268. *Corollario* II. *Le sfere stanno fra loro come i cubi dei raggi, o dei diametri.*

Infatti le sfere stanno in ragion composta dalla ragione delle loro superficie, e dalla ragione dei raggi. Ma la prima ragione è duplicata di quella dei raggi, dunque le sfere stanno in ragion triplicata degli stessi raggi, ovvero come i cubi dei raggi, o dei diametri.

PROPOSIZIONE CIV — *TEOREMA.*

269. ***Il settore sferico ha per misura il prodotto della zona che gli serve di base pel terzo del raggio*** (fig. 54.).

Dim. Sia il settore sferico CDEK generato dalla rotazione del settore circolare CKE intorno al raggio CE.

Nel cerchio DBK, base della callotta generata dall' arco CK, s' iscriva un poligono regolare, di cui un lato sia BK: Si tirino i raggi AB, AK, e si ripeta la costruzione fatta nella proposizione precedente. Si dimostrerà come nella proposizione accennata che il settore sferico, generato dal rivolgimento del settore circolare CKE intorno al raggio CE può considerarsi composto di una infinità di piramidi, delle quali le basi formano la callotta descritta dall' arco CK, e l' altezza comune è uguale al raggio. Quindi il settore sferico avrà per misura il prodotto della callotta pel terzo del raggio; il che si doveva dimostrare.

270. *Corollario.* I. Essendosi dimostrato (n° 256) che la callotta descritta dall' arco AB. (fig. 55) è equivalente al circolo che ha per raggio la corda AB, il settore sferico descritto dal settore circolare ABO sara equivalente al cono che ha per altezza il raggio AO della sfera, e per base un cerchio, di cui il raggio é uguale alla corda AB dell' arco generatore della callotta che serve di base al settore.

Se il settore sferico fosse descritto dal settore circolare BCO maggiore del quadrante, esso sarebbe equivalente al cono che ha per altezza il raggio OC della sfera, e per base il cerchio, di cui il raggio è uguale alla corda BC dell' arco generatore della calotta che serve di base al settore.

271. *Corollario* II. Essendo il quadrato di AB uguale ai quadrati di AE, EB, il cerchio che ha per raggio AB sarà uguale ai cerchi che hanno per raggi AE, EB, per conseguenza il cono che ha per base il cerchio di raggio AB, e per altezza AO, ovvero il settore sferico prodotto dal rivolgimento del settore circolare ABO, sarà uguale alla somma di due coni, che hanno la medesima altezza AO e per basi i cerchi dei raggi AE, EB.

PROPOSIZIONE CV — *TEOREMA*

272. ***Il segmento sferico ad una base è equivalente al cono, che ha per base il cerchio, di cui il raggio è l' altezza del segmento, e per asse la rimanente parte del diametro accresciuta del raggio*** (fig. 55.)

Dim. Si consideri il segmento sferico generato dal rivolgimento del mezzo segmento circolare ABE intorno ad AE. Essendo il settore sferico generato dal settore circolare ABO uguale alla somma

di due coni, che hanno per basi i cerchi dei raggi AE, EB, e per altezza AO (n° 271), se si tolga di comune il cono prodotto dal rivolgimento del triangolo BEO intorno ad EO, il segmento sferico proposto sarà uguale alla somma di due coni, de' quali il primo ha per base il cerchio di raggio AE, per altezza AO, ed il secondo ha per base il cerchio di raggio BE, e per altezza AE, poichè il cono che ha per base il cerchio di raggio BE, e per altezza AO è uguale alla somma dei due coni che hanno per base il cerchio accennato, per altezze le ret e AE, EO. Or essendo BE media proporzionale fra i due segmenti AE, EC, del diametro, il quadrato di AE starà al quadrato di BE come AE ad EC. Quindi il cerchio di raggio AE starà al cerchio di raggio BE come AE ad EC, e facendo in questa proporzione il prodotto degli estremi e quello dei medii, ne risulterà che il cono il quale ha per base il primo di quelli cerchi, e per altezza EC sarà equivalente al cono che ha per base il secondo cerchio, e per altezza AE. Dalle cose fin qui esposte si deduce che il segmento sferico proposto è uguale alla somma di due coni, dei quali ciascuno ha per base il cerchio di raggio AE, ma il primo ha per altezza AO, ed il secondo EC; per conseguenza il segmento medesimo sarà equivalente al cono che ha per base il cerchio, di cui il raggio è l'altezza AE del segmento, e per asse la rimanente parte, EC del diametro accresciuta del raggio AO.

273. *Scolio*. I. Se il segmento sferico ad una base fosse maggiore dell'emisfero, come sarebbe quello prodotto dal rivolgimento del mezzo segmento circolare EBC intorno ad EC, avrebbe luogo la stessa dimostrazione fatta qui sopra, solamente invece di sottrarre il cono generato dal triangolo BEO, si deve aggiungere al settore sferico generato dal settore circolare CBO

274. *Scolio* II. Se il segmento sferico avesse due basi, come quello descritto dalla porzione di cerchio BCFE (fig. 52) si otterrà il suo volume osservando che esso è sempre la differenza di due segmenti sferici, dei quali ciascuno ha una sola base, come sarebbero i segmenti sferici descritti dai mezzi segmenti circolari ACF, ABE.

275. *Scolio* III. Merita ancora di essere osservato che

Il volume di un segmento sferico ad una base ha per misura il prodotto del cerchio, che avrebbe per raggio l'altezza di questo segmento, pel raggio della sfera diminuito del terzo di quella altezza.

Questa espressione del volume del segmento sferico equivale a quella data nel teorema precedente. Infatti, la porzione EC del diametro AC (fig. 55) coll'aggiunta del raggio AO equivale a tre volte il raggio AO meno l altezza AE del segmento; per conseguenza il cono che ha per base il cerchio di raggio AE, e per asse la rimanente porzione EC del diametro con l'aggiunta del raggio AO, avrà per misura il cerchio di raggio AE moltiplicato pel raggio AO diminuito del terzo di AE.

CAPITOLO IV.

DELLE RAGIONI, CHE HA LA SFERA COL CILINDRO, E COL CONO AD ESSA CIRCOSCRITTI.

PROPOSIZIONE CVI — *TEOREMA*.

276. *Il cilindro retto sta alla sfera cui è circoscritto come 6: 4, tanto rispetto alla superficie totale, quanto alla solidità* (fig. 56).

Dim. Sia DFPE un quadrato circoscritto al circolo AGBH, i diametri AB, GH saranno l'uno perpendicolare all'altro; e da simultaneo rivolgimento del semicircolo AGB, e del semiquadrato ADEB intorno ad AB si produrrà una sfera, ed un cilindro retto ad essa circoscritto. il quale ha le basi uguali a due circoli massimi della sfera medesima; poichè il diametro EP, o DF di ciascuna di queste basi è uguale al diametro GH della sfera. Da ciò si deduce che la superficie curva del cilindro circoscritto alla sfera è uguale alla superficie di questa sfera. essendo l'una e l'altra espressa dal prodotto della circonferenza di un circolo massimo per l'asse AB. Ma la superficie della sfera equivale a quattro circoli massimi (n° 252). dunque se alla superficie curva del cilindro si uniscono le due basi, la superficie totale del cilindro sarà uguale a sei circoli massimi; e però la superficie del cilindro circoscritto starà a quella della sfera come 6: 4.

Venendo ora alle solidità. si osservi che il cilindro ha per misura il prodotto della base, che è un cerchio massimo, pel diametro AB, ovvero per 6/3 del raggio CB; e che la sfera ha per misura la sua superficie moltiplicata per 1/3 dello stesso raggio; il che equivale al prodotto di un cerchio massimo per 4/3 del raggio, essendo la superficie sferica uguale a quattro circoli massimi. Laonde il cilindro starà alla sfera come 6/3 a 4/3 ossia come 6: 4.

277. *Scolio* I. Dal teorema precedente apparisce che nei due solidi, cioè il cilindro retto circoscritto alla sfera e la sfera, i volumi stanno fra loro come le superficie totali. Archimede apprezzò a tal segno questa sua scoperta da volere che in vece del proprio nome si scolpisse sulla sua tomba un cilindro circoscritto alla sfera.

278. *Scolio* II. Merita ancora di essere osservato che se il cilindro e la sfera si segano con piani perpendicolari all'asse AB, i singoli segmenti della superficie curva del cilindro saranno equivalenti ai singoli segmenti della superficie sferica. Così per esempio. la callotta generata dal rivolgimento del mezzo segmento circolare B*or* intorno a B*r* è equivalente alla superficie curva del cilindro generato dal rettangolo EB*rm*; dappoichè hanno la stessa misura, cioè la circonferenza di un circolo massimo per l'altezza B*r*.

PROPOSIZIONE CVII — *TEOREMA*.

279. *Il cono sta alla sfera cui è circoscritto come* 9: 4, *tanto, rispetto alla superficie totale, quanto alla solidità* (fig. 57).

Dim. Sia SAD un triangolo equilatero circoscritto al cerchio EBF. Nel simultaneo rivolgimento del semicircolo EBH, e del triangolo SBA intorno a SB si avrà un cono retto circoscritto ad una sfera. Or se si congiunga il punto A col centro C, la retta AC dividerà in due parti uguali l'angolo formato dalle due tangenti AE, AB, ma la retta SB divide ancora per metà l'angolo ESF, dunque i due triangoli SAB, ACB sono equiangoli; e perciò simili, e si avrà

SA: AB :: AC: CB.

Laonde essendo SA doppia di AB, sarà ancora AC doppia del raggio CB, e per conseguenza il quadrato di AC risulterà quadruplo del quadrato di CB. Ma da un'altra parte il quadrato di AC è uguale ai quadrati di AB, CB; poichè è retto l'angolo ABC, dunque il quadrato di AB è triplo del quadrato di CB; e perciò il cerchio che serve di base al cono sarà triplo di un cerchio massimo.

Ciò premesso, si osservi che la superficie convessa del cono ha per misura la circonferenza della base per AE, che è la metà del lato SA del cono, ovvero ha per misura la circonferenza della base pel raggio AB della base medesima; per conseguenza la superficie curva del cono sarà doppia di quella base, la quale essendo uguale a tre cerchi massimi, risulterà infine che la superficie curva del cono è uguale a sei cerchi massimi, e perciò la superficie totale del cono sarà uguale a nove cerchi massimi. Dunque la superficie totale del cono starà a quella della sfera come 9: 4.

Lo stesso rapporto sussiste per i volumi. Infatti, il cono ha per misura la sua base pel terzo della sua altezza SB, ovvero ha per misura il prodotto di tre cerchi massimi pel raggio CB, che è la terza parte di SB, perchè CS è uguale a CA, e questa è doppia di CB; oppure ha per misura un cerchio massimo per 9/3 del raggio CB. Ma la sfera ha per misura la sua superficie pel terzo del raggio CB, ovvero quattro cerchi massimi pel terzo del raggio CB, o infine un cerchio massimo per 4/3 del raggio CB, dunque il cono sta alla sfera come 9/3 a 4/3, ossia come 9: 4.

280. *Scolio* I. Dalle due proposizioni precedenti si deduce che il cilindro circoscritto alla sfera è medio proporzionale fra la sfera ed il cono ad essa circoscritto, tanto rispetto alla superficie, quanto alla solidità, perchè i tre numeri 9, 6 e 4 formano una proporzione continua (*).

(*) Se il cono, ed il cilindro fossero iscritti alla sfera, non avrebbe più luogo la proporzione in quanto ai volumi, ma soltanto per ciò che spetta alla superficie.

281. *Scolio* II. Si è veduto (n° 266) come s'iscrive in una sfera un poliedro. Or è manifesto che si potrebbe concepire un poliedro simile, di cui tutte le facce fossero tangenti alla sfera: in tal caso il poliedro accennato potrà considerarsi come composto di piramidi aventi per altezza comune il raggio della sfera, e per basi le differenti facce del poliedro. Quindi il volume del poliedro medesimo si avrà con moltiplicare la sua superficie pel terzo del raggio della sfera iscritta; ma questa ha per misura il prodotto della sua superficie pel terzo del raggio, dunque le solidità dei poliedri circoscritti alla sfera stanno come le superficie di questi medesimi solidi, e per conseguenza la proprietà dimostrata (n.° 277) pel cilindro circoscritto alla sfera appartiene ad una infinità di altri solidi. Infine giova osservare che siffatta proprietà è analoga a quella che hanno i poligoni circoscritti ad uno stesso cerchio, poichè le aje di questi poligoni stanno come i loro perimetri.

CAPITOLO V.

DEI POLI DEI CIRCOLI DELLA SFERA.

282. *Definizione* I. Il *polo* di un circolo della sfera è un punto della superficie sferica, il quale è ugualmente distante da tutt' i punti della circonferenza del circolo medesimo.

283. *Definizione* II. Il diametro della sfera, il quale è perpendicolare al piano di un circolo della sfera, dicesi *asse* dello stesso circolo.

PROPOSIZIONE CVIII — *TEOREMA*.

284. *Ogni circolo della sfera ha due poli situati agli estremi del suo asse* (fig. 48).

Dim. Sia in primo luogo un circolo massimo DLC, ed AB il suo asse. Si conducano per questo asse i circoli massimi ADB, ALB, ecc. e dal centro O della sfera si tirino i raggi OD, OL, OC, ecc.

Essendo AO perpendicolare al piano DLC, le corde degli archi AD, AL, AC, ecc: saranno eguali come oblique che si allontanano egualmente dalla perpendicolare; e però saranno eguali gli archi medesimi. Lo stesso si verifica per gli archi DB, LB CB, ecc. dunque i punti A, e B sono poli del circolo massimo DLC.

In secondo luogo sia MKN un circolo minore, ed AB il suo asse. Dal centro E di questo circolo si tirino i raggi EM, EK, EN, ecc., si dimostrerà come sopra che le corde degli archi AM, AK, AN, ecc. sono eguali, per conseguenza questi medesimi archi saranno eguali, come pure gli archi MB, KB, NB. ecc., e si conchiuderà come precedentemente che i punti A, e B sono poli del circolo minore MKN; il che si doveva dimostrare.

285. *Corollario* I. Si deduce da questo teorema che due circoli

massimi non possono avere uno stesso polo; perocchè congiungendo questo polo col centro comune dei due circoli, la retta congiungente sarebbe perpendicolare in uno stesso punto a due piani diversi; il che non può sussistere.

286. *Corollario* II. Se per i poli di un circolo massimo DLC si faccia passare un altro circolo ALB, ciascuno degli archi AL, BL, sarà un *quadrante*, cioè la quarta parte della circonferenza di un circolo massimo; ed il suo piano sarà perpendicolare al piano DLC.

Reciprocamente, se la distanza di un punto di un circolo al polo di questo circolo è uguale ad un quadrante, esso circolo sarà massimo; e se un circolo massimo è perpendicolare ad un altro circolo massimo, il primo passerà per i poli del secondo.

287. *Corollario* III. Per le proprietà de' poli si possono descrivere sulla superficie della sfera archi di cerchio come sopra un piano. Infatti, se si ponga la punta di un compasso in A, e con un dato intervallo AM si faccia girare il compasso intorno ad A, l'altra punta descriverà la circonferenza MKN. Se l' intervallo è uguale al quadrante AD, si descriverà una circonferenza DLC di circolo massimo.

288. *Definizione* III. Se due archi di circoli massimi s' incontrano sulla superficie della sfera, l'angolo da essi compreso sarà l' angolo formato dai piani, ne' quali gli archi si ritrovano.

PROPOSIZIONE CIX — *TEOREMA*.

289. *L' angolo* MAK *che fanno tra loro due archi* AM, AK *di circoli massimi, è uguale all angolo* RAF *formato dalle tangenti condotte a questi archi dal punto* A; *esso ha ancora per misura l'arco* DL *descritto dal punto* A *come polo fra i lati* AM, AK, *prolungati, se occorra* (fig. 48).

Dim. Infatti, la tangente AR tirata nel piano dell'arco AM è perpendicolare al raggio AO; e la tangente AF condotta nel piano dell' arco AK è perpendicolare allo stesso raggio; per conseguenza l' angolo RAF è uguale all'angolo DOL che misura l' inclinazione de' due piani OAD, OAL, che è quella degli archi AM, AK. Ma l'angolo DOL è misurato dall' arco DL, dunque ancora l' arco DL è la misura dell'angolo formato dagli archi AM, AK, come si doveva dimostrare.

290. *Corollario* I. Gli angoli ALD, BLC opposti al vertice sono eguali, perchè l'uno e l'altro è sempre l'angolo formato dagli stessi piani ALB, DLC.

291. *Corollario* II. Se un arco AL incontra un altro DC, la somma degli angoli adiacenti ALD, ALC è sempre uguale a due angoli retti.

PROPOSIZIONE CX — *PROBLEMA.*

292. *Trovare il polo di un arco di circolo massimo* (fig. 48).

Sol. Sia DL l'arco dato. Dai punti D, e L come poli, e coll'intervallo di un quadrante si descrivano sulla superficie sferica due archi che si taglieranno in un punto A. Gli archi AD, AL saranno quadranti, e però gli angoli AOD, AOL saranno retti, la retta AO sarà perpendicolare al piano DLC. ed il punto A sarà il polo del circolo massimo DLC, ovvero dell'arco DL; il che si doveva fare.

PROPOSIZIONE CXI — *PROBLEMA.*

293. *Descrivere su la superficie della sfera un arco di circolo massimo, che passi per due punti dati* (fig. 48).

Sol. Siano D, e L i due punti dati. Da ciascuno di questi punti come poli, e coll'intervallo di un quadrante si descrivano sopra la superficie sferica due archi, che si taglieranno in un punto A, che sarà il polo dell'arco di circolo massimo, che passa per i punti D, e L. Se dunque col punto A come polo, e coll' intervallo di un quadrante si descriva un arco, questo passerà per i punti D, e L, e sarà l'arco richiesto.

PROPOSIZIONE CXII — *PROBLEMA*

394. *Da un punto di un arco di circolo massimo condurre un altro arco di circolo massimo perpendicolare al primo* (fig. 48).

Sol. Sia DS un arco di circolo massimo, e L il punto dato in esso. Si trovi il polo A dell' arco DL, poi per i due punti A, e L si faccia passare un arco di circolo massimo AL, questo sarà l' arco richiesto.

PROPOSIZIONE CXIII — *PROBLEMA.*

295. *Per un punto dato su la superficie della sfera condurre un arco di circolo massimo perpendicolare ad un arco dato* (fig.48).

Sol. Sia K il punto dato, e DS l'arco dato. Dal punto K come polo, e coll'intervallo di un quadrante si descriva un arco, che taglierà l'arco DS, prolungato se occorra, in un punto C; poi da questo punto come polo, e collo stesso intervallo di un quadrante si descriva un arco KL, questo sarà l'arco richiesto. Infatti, essendo CL un quadrante, l'arco KL sarà perpendicolare all'arco DS.

CAPITOLO VI.

DEI TRIANGOLI SFERICI.

296. *Definizione.* I. Si chiama *triangolo sferico* una parte della superficie della sfera compresa fra tre archi di circoli massimi, ciascuno de' quali dev' esser minore di una semi-circonferenza.

297. *Definizione.* II. I *lati* di un triangolo sferico sono gli archi che formano il suo perimetro. Gli *angoli* poi sono gli angoli che fanno i piani, ne' quali si trovano i lati accennati.

298. Da ciò si deduce che un angolo di un triangolo sferico sarà retto, o acuto, o altuso, secondo la specie dell' angolo diedro formato dai due piani ne' quali si trovano i suoi lati.

299. Abbenchè si possano concepire descritti sulla superficie della sfera triangoli formati da tre archi di tre circoli minori, purtuttavolta di questi non si fa parola negli elementi di geometria, perchè essendo disuguali i circoli minori, i loro lati non hanno una costante curvatura, come avviene negli archi de' circoli massimi.

300. Se si prolunghi un lato AC (fig. 58) del triangolo sferico ABC, e si descriva la circonferenza ACE, di cui l' arco AC è parte nascerà un secondo triangolo, che sarà formato dai tre archi AB, BC, ed AEDC. In questo secondo triangolo il lato AEDC è maggiore di una mezza circonferenza; ma è manifesto che basta conoscere gli elementi, cioè i lati e gli angoli, del primo triangolo ABC per avere quelli del secondo.

Ed ecco perchè si considerano soltanto quei triangoli sferici, ne' quali ciascun lato è minore di mezza circonferenza.

301. *Definizione* III. Un triangolo sferico si dice *rettangolo*, *isoscele*, *equilatero*, negli stessi casi che un triangolo rettilineo.

302. *Definizione.* IV. Una parte della superficie della sfera terminata da più archi di circoli massimi, dicesi *poligono sferico* (fig. 59).

303. *Definizione.* V. Si chiama *piramide sferica* la parte della sfera compresa fra i piani di un angolo solido, il cui vertice trovasi al centro della sfera medesima. Il poligono sferico, che è compreso fra i piani accennati, dicesi *base* della piramide sferica.

304. Da questa definizione si deduce che se si congiungano i tre vertici A, B, C (fig. 60) di un triangolo sferico per mezzo de' raggi AS, BS, CS, si formerà una piramide triangolare sferica SABC. Gli angoli diedri SA, SB, SC, saranno precisamente gli angoli del triangolo sferico ABC, e gli angoli piani ASB, BSC, ASC avranno per misura i lati di questo triangolo, poichè questi lati si possono considerare come descritti col centro comune S, e collo stesso raggio ne' tre piani che formano l' angolo solido S. Quindi tutte le quistioni relative ai triangoli sferici si riducono a quistioni relative agli angoli tricdri con un semplice cangiamento di nomi, cioè

con dire *lati* in vece di *angoli piani*, ed *angoli* in vece di *angoli diedri*.

305. Il circolo che passa per i tre vertici A, B, C, (fig. 60), ovvero che è circoscritto al triangolo sferico ABC, è sempre un circolo minore dalla sfera; perchè se fosse un circolo massimo, i tre lati AB, BC, AC, sarebbero situati in un medesimo piano, ed il triangolo ABC si ridurrebbe ad uno de' suoi tre lati.

De' triangoli sferici simmetrici.

306. *Definizione* VI. Due triangoli sferici si dicono *simmetrici*, quando essendo descritti sopra una stessa sfera o sopra sfere uguali, gli angoli triedri corrispondenti sono simmetrici.

307. Da questa definizione si deduce che ne' triangoli sferici simmetrici i lati, e gli angoli sono rispettivamente eguali, ma non sono disposti collo stesso ordine; e però non si può mai dimostrare la loro eguaglianza per mezzo della sovrapposizione; eccetto il caso de' triangoli sferici isosceli; perocchè, come è manifesto, questi non possono essere simmetrici. Quindi

Due triangoli sferici isosceli sono eguali, quando hanno i tre lati rispettivamente eguali.

Infatti, in tal caso sono eguali gli angoli triedri corrispondenti.

308. Un triangolo sferico non può avere che un solo simmetrico, perchè un angolo triedro non può avere che un solo simmetrico.

PROPOSIZIONE CXIV — *PROBLEMA*.

309. *Descrivere un triangolo sferico simmetrico ad un triangolo dato* (fig. 25).

Sol. Sia ABC il triangolo sferico dato. Si uniscano i vertici A, B, C, col centro S della sfera, e si prolunghino i raggi AS, BS, CS finchè incontrano la superficie della sfera nei punti A', B', C'; poi si conducano gli archi di circoli massimi A'C', A'B', B'C', il triangolo A'B'C' sarà il triangolo richiesto; poichè si è dimostrato altrove (n° 74) che gli angoli triedri SABC, SA'B'C' sono simmetrici.

310. *Scolio* I. Questo problema si potrebbe ancora risolvere per mezzo delle proprietà de' poli, ma la soluzione precedente è assai più semplice.

311. *Scolio* II. Per lungo spazio di tempo si è considerata l'eguaglianza dei triangoli sferici simmetrici come analoga a quella de' triangoli rettilinei. Senza dubbio i geometri vedevano che la superficie sferica non si può rovesciare come il piano; e che per conseguenza era impossibile dimostrare l'eguaglianza delle aje de' triangoli sferici simmetrici colla sovrapposizione; ma deducevano una siffatta eguaglianza dalla eguaglianza degli elementi de' triangoli accennati, analogamente a ciò che abbiamo detto (n° 73) intorno

alla eguaglianza degli angoli triedri simmetrici, non essendovi alcuna ragione perchè debbano differire l'uno dall' altro. Purtuttavolta potendosi oggi dimostrare a rigore l'eguaglianza delle aje dei triangoli sferici simmetrici, daremo qui appresso la dimostrazione di questo teorema, che ricaveremo dalle proprietà dei poli.

PROPOSIZIONE CXV — *TEOREMA*.

312. *I triangoli sferici simmetrici sono equivalenti* (fig. 61).

Dim. Siano ABC, DEF due triangoli sferici simmetrici, nei quali sia il lato AB = DE, AC = DF, e BC = EF: dico che l'aja del triangolo ABC è uguale a quella del triangolo DEF. Infatti, i lati dei due triangoli essendo eguali ciascuno a ciascuno, le corde da essi sottese saranno pure eguali e formeranno triangoli rettilinei eguali; per conseguenza i circoli circoscritti a questi triangoli saranno eguali. Quindi se per i poli O, e P di questi circoli si conducano archi di circoli massimi agli angoli dei triangoli proposti, questi archi saranno eguali (n° 282), e si formerà in questo modo sopra ogni lato de' triangoli proposti un triangolo sferico isoscele. Or i tre triangoli isosceli del primo de' triangoli dati sono rispettivamente uguali ai tre del secondo (n° 307), dunque le aje dei triangoli proposti saranno formate nello stesso modo con quelle dei nuovi triangoli; e però i triangoli sferici simmetrici sono equivalenti, come si doveva dimostrare.

313. *Scolio*. Se i poli O, e P dei circoli circoscritti ai triangoli cadessero fuori di questi, la dimostrazione sarebbe sempre la stessa come si può vedere facilmente.

314. *Corollario*. Se si congiungano i vertici dei triangoli ABC, DEF (fig. 61) col centro della sfera, o con i centri di due sfere eguali, le piramidi triangolari sferiche simmetriche che ne risulteranno, saranno equivalenti. Infatti, è manifesto dalla proposizione precedente che le due piramidi saranno composte di parti eguali ciascuna a ciascuna, abbenchè non siano disposte con lo stesso ordine.

Inoltre, si dimostra similmente che gli angoli solidi triedri simmetrici, formati ai vertici delle due piramidi, sono equivalenti. Questa verità, alla quale arrivammo per altra strada (n° 73), si trova ora messa in piena luce, e rigorosamente dimostrata.

Caratteri dell' eguaglianza dei triangoli sferici.

315. Paragonando i triangoli sferici con gli angoli triedri corrispondenti, e richiamando ciò che è stato dimostrato (n° 72, 77, 78, 79), risulta che due triangoli sferici descritti su la medesima sfera, o sopra sfere uguali, sono eguali o simmetriche, se si avvera una delle seguenti condizioni.

1.° *I tre lati eguali ciascuno a ciascuno.*

2.° *Un angolo eguale compreso fra due lati eguali ciascuno a ciascuno.*

3.° *Un lato eguale adiacente a due angoli eguali ciascuno a ciascuno.*

4.° *I tre angoli eguali ciascuno a ciascuno.*

316. Quest' ultimo carattere di eguaglianza non ha luogo, come vedemmo nella geometria piana, nei triangoli retti line; perchè in questi se gli angoli sono eguali ciascuno a ciascuno, i lati non sono eguali, ma sono proporzionali. All'opposto nei triangoli sferici, che hanno gli angoli eguali, e sono descritti sopra una medesima sfera, o sopra sfere uguali, se i lati fossero proporzionali, essi diverrebbero eguali come archi simili di circonferenze che hanno i raggi eguali. Quindi ne triangoli sferici descritti sopra la stessa sfera, se gli angoli sono eguali, i triangoli non saranno simili, ma eguali, o simmetrici saranno nondimeno simili, se posta l' eguaglianza degli angoli, sono descritti sopra sfere, che abbiano raggi disuguali.

Dei triangoli sferici supplementarj.

317. *Definizione.* Due triangoli sferici si dicono *supplementarj*, quando essendo descritti sopra una stessa sfera, o sopra sfere eguali, gli angoli triedri corrispondenti sono supplementarj.

318. Apparisce da questa definizione che se nel centro di una sfera si situano due angoli triedri supplementarj, i triangoli sferici determinati dalle intersezioni delle facce di questi angoli colla superficie sferica, saranno supplementarj, ed in tal modo si vede come si possa descrivere un triangolo sferico, che sia supplementario ad un altro triangolo dato. Da ciò poi si deduce che ogni triangolo sferico ha il suo supplementario vale a dire che ad ogni triangolo sferico corrisponde un altro triangolo, di cui i lati, e gli angoli sono rispettivamente supplementi degli angoli, e dei lati del primo.

E poichè le cose precedenti si possono ancora dimostrare per mezzo delle proprietà dei poli, così è avvenuto che i triangoli sferici supplementarj si chiamano ancora *triangoli sferici polari.* Ma avendo noi a suo luogo parlato dell'angolo triedro supplementario, non abbiamo bisogno di ricorrere alle proprietà dei poli.

Proprietà dei triangoli sferici.

PROPOSIZIONE CXVI — *TEOREMA.*

319. *In ogni triangolo sferico un lato qualunque è minore della somma degli altri due* (fig. 60).

Dim. Sia ABC un triangolo sferico; e SABC l'angolo triedro corrispondente. Or in ogni angolo triedro ciascun angolo piano è minore della somma degli altri due (n° 66); dunque ciascuno degli archi AB, AC, BC, che misurano questi angoli, dovrà esser minore della somma degli altri due; il che si doveva dimostrare.

PROPOSIZIONE CXVII — TEOREMA

320. *Il più corto cammino fra due punti* A, e B *situati sopra la superficie di una sfera è il più piccolo dei due archi del circolo massimo che passa per questi due punti* (fig. 62).

Dim. Infatti, si supponga che il più corto cammino fra i punti A. e B non sia l'arco AB di circolo massimo, ma una linea AMNB differente dall' arco AB. Si prenda un punto M su questa linea, e per i punti A, M, e B, M si facciano passare gli archi AM, MB di circoli massimi: risulterà il triangolo sferico AMB; e per conseguenza (n° 319), si avrà,

$$AM + MB > AB$$

Prendendo in seguito un punto N tra M. e B, e conducendo gli archi MN, e NB di circoli massimi, si avrà ancora.

$$MN + NB > MB.$$

e però aggiungendo dall' una e dall' altra parte l' arco AM, risulterà

$$AM + MN + NB > AM + MB$$

Proseguendo nello stesso modo, si rende manifesto che il cammino fra i punti A, e B va crescendo a misura che più ci avviciniamo al'a linea AMNB. e per conseguenza è evidente che l' arco AB è il più corto cammino fra i punti A, e B; e non vi potrebbe essere altro arco, poichè fra due punti A, e B situati su la superficie di una sfera non può passare che un solo circolo massimo; il che si doveva dimostrare.

321. *Scolio* I. Nella dimostrazione precedente si è supposto che la linea AMNB fosse esterna a tutti gli archi di circoli massimi condotti per due qualunque de' suoi punti. Ma se accadesse l' opposto, come si vede nella parte punteggiata MN′A, si condurrebbero gli archi MN′, ed AN′ di circoli massimi; e poichè risulterebbe

$$AN' + MN' > AM,$$

si conchiuderebbe come sopra che AN′ + MN′ + MN + NB è maggiore di AM + MB, ovvero di AB.

322. *Scolio* II. Essendo l' arco di circolo massimo la misura di ogni distanza sferica, anche per questa ragione si adoperano i soli archi di circoli massimi per lati de' triangoli sferici, e non quelli di circoli minori.

PROPOSIZIONE CXVIII — TEOREMA.

323. *La somma dei tre lati di ogni triangolo sferico è minore della circonferenza di un circolo massimo* (fig. 60).

Dim. Infatti, essendo nell' angolo triedro SABC la somma dei tre angoli piani minore di quattro angoli retti, la somma dei lati del triangolo sferico ABC, che misurano i detti angoli piani, dovrà

essere minore di una circonferenza di circolo massimo che misura i quattro angoli retti.

324. *Scolio.* Si dimostra similmente che

La somma de' lati di ogni poligono sferico è minore della circonferenza di un circolo massimo (fig. 59.)

Perocchè nell' angolo solido corrispondente al poligono ABCDE, la somma degli angoli piani è minore di quattro angoli retti; e per conseguenza la somma de' lati del poligono dev' essere minore della circonferenza di un circolo massimo.

PROPOSIZIONE CXIX — *TEOREMA.*

325. *La somma degli angoli di un triangolo sferico è minore di sei, e maggiore di due angoli retti* (fig. 60).

Dim. Infatti; ciascun angolo di un triangolo sferico ABC è minore di due retti; e perciò la somma dei tre angoli è minore di sei retti. Di più, ciascun angolo del triangolo ABC è il supplemento di un lato del triangolo sferico supplementario (n° 318), e per conseguenza equivale ad una mezza circonferenza meno questo lato. Dunque la somma dei tre angoli del triangolo ABC vale tre mezze circonferenze meno i tre lati del triangolo supplementario. Or questi tre lati valgono meno di due mezze circonferenze (n° 323), perciò se da tre mezze circonferenze si togle una quantità minore di due mezze circonferenze, il resto sarà maggiore di una mezza circonferenza. Quindi la somma dei tre angoli del triangolo ABC avrà per misura un arco maggiore di una mezza circonferenza; e però la detta somma sarà maggiore di due angoli retti.

326. *Corollario* I. Dal teorema precedente apparisce che la somma dei tre angoli di un triangolo sferico non è costante come quella dei tre angoli di un triangolo rett lineo; ma varia da due sino a sei angoli retti senza mai uguagliare nè l'uno nè l'altro limite. Laonde essendo dati due angoli di un triangolo sferico non si può trovare il terzo angolo: e così pure è manifesto che l' angolo esterno di un triangolo sferico non è uguale, ma minore della somma dei due interni ed opposti.

327. *Corollario* II. Si deduce ancora che un triangolo sferico può avere due o tre angoli retti, due o tre angoli ottusi. Il triangolo sferico, che ha due angoli retti. dicesi *bi-rettangolo*; chiamasi poi *tri-rettangolo* quando ha tre angoli retti.

Se il triangolo ADL (fig. 48) ha retti due angoli D, e L, il vertice A sarà il polo dell'arco DL, e ciascuno de' lati AD, AL sarà un quadrante.

Se poi si suppone che il lato DL sia esso pure un quadrante, allora il triangolo ADL sarà tri-rettangolo, e sarà contenuto otto volte nella superficie della sfera.

PROPOSIONE CXX — *TEOREMA.*

328. ***In ogni triangolo sferico isoscele gli angoli opposti ai lati uguali sono uguali. Reciprocamente se due angoli di un triangolo sferico sono uguali, i lati ad essi opposti saranno pure uguali*** (fig. 63).

Dim. Sia ABC un triangolo sferico isoscele, nel quale si supponga AB = AC. Si divide la base in due parti uguali nel punto D, e si faccia passare l'arco di circolo massimo AD; si avranno i due triangoli ABD, ACD, nei quali essendo i tre lati rispettivamente uguali, sarà l'angolo B = C.

In secondo luogo, supponendo che *abc* sia il triangolo supplementario del triangolo proposto, dall'essere B=C si deduce *ac*=*ab*; e quindi sarà l'angolo *b* = *c*; dal che infine risulta l'uguaglianza dei lati AC, AB.

329. *Corollorio.* Apparisce da questo teorema che

1°. *Un triangolo sferico equilatero è anche equiangolo, e reciprocamente.*

2.° ***In un triangolo sferico isoscele l'arco di circolo massimo condotto dal vertice al punto di mezzo della base è perpendicolare a questa base, e divide l'angolo al vertice in due parti uguali.***

PROPOSIZIONE CXXI — *TEOREMA.*

330. ***In ogni triangolo sferico il lato opposto all'angolo maggiore è maggiore del lato opposto all'angolo minore; e reciprocamente*** (fig. 64).

Dim. Sia in primo luogo l'angolo B maggiore dell'angolo A, sarà il lato AC maggiore del lato CB. Infatti si conduca l'arco di circolo massimo BD in guisa che risulti l'angolo ABD = A (*): in virtù della proposizione precedente si avrà BD = AD. Ma nel triangolo BDC, il lato BC è minore della somma dei lati BD, DC, ovvero di AD + DC; dunque AC è maggiore di CB.

In secondo luogo sia il lato AC maggiore del lato CB, sarà l'angolo B maggiore dell'angolo A; poichè se fosse minore, o uguale nel primo caso sarebbe il lato AC minore del lato CB, e nel secondo caso si avrebbe AC = CB, contro la supposizione in ambidue i casi; per conseguenza dev'essere l'angolo B maggiore dell'angolo A.

(*) Ciò è sempre possibile. Infatti, si divida l'arco AB in due parti uguali, e pel punto di mezzo si faccia passare un arco di circolo massimo perpendicolare ad AB, che incontri l'arco AC nel punto D; indi per questo punto e pel punto B si faccia passare un arco di circolo massimo DB, risulteranno due triangoli rettangoli uguali, e però sarà l'angolo ABD = A.

PROPOSIZIONE CXXII — *TEOREMA*.

331. *Se due triangoli sferici, descritti su la stessa sfera, o sopra sfere eguali, hanno due lati uguali respettivamente a due lati, ma l' angolo compreso dai due primi è maggiore dell' angolo compreso dai due secondi, sarà il terzo lato del primo triangolo maggiore del terzo lato del secondo*; *e reciprocamente.*

La dimostrazione è simile a quella fatta pel caso analogo nei triangoli rettilinei.

Misura del fuso, del triangolo sferico, e del poligono sferico

PROPOSIZIONE CXXIII — *TEOREMA*.

332. *Il fuso sta alla superficie della sfera come l' angolo dei semicircoli massimi che comprendono il fuso sta a quattro angoli retti* (fig. 65),

Dim. Sia il fuso AMBN compreso dai due semicircoli massimi AMB, ANB che terminano al diametro comune AB. L'angolo MAN formato dai due archi AM, AN, e che dicesi *angolo del fuso*, può essere misurato (n° 289) dall' angolo MON, ovvero dall' arco MN del circolo massimo MNP, che ha per asse il diametro AB. Oltre a ciò, è evidente che sopra una medesima sfera due fusi sono uguali quando i semicircoli che li comprendono formano tra loro angoli uguali. Ciò premesso, è facile dimostrare la proposizione enunciata. Infatti, supponiamo in primo luogo che l' arco MN sia commensurabile colla circonferenza MNP; e che stia a questa come 3 a 12. Dividendo la circonferenza in 12 parti uguali, l' arco MN conterrà 3 di queste parti; poi facendo passare per i punti di divisione, e per i punti A, B, 12 circoli massimi, la superficie sferica sarà decomposta in 12 fusi uguali, 3 dei quali saranno contenuti nel fuso AMBN. Quindi il fuso accennato sta alla superficie sferica come l' arco MN alla circonferenza MNP, oppure come l'angolo MAN del fuso sta a quattro angoli retti.

Se l' arco MN fosse incommensurabile colla circonferenza MNP, la proposizione enunciata si dimostrerebbe col ragionamento fatto nella geometria piana in un caso analogo (*)

333. *Scolio* È manifesto che colla stessa dimostrazione si potrebbe provare che l' unghia sferica AMBN sta alla sfera come l'arco MN sta alla circonferenza MNP.

(*) Vedi Geom. Piana n° 378.

PROPOSIZIONE CXXIV — *TEOREMA.*

334. *Il fuso ha per misura il prodotto del suo arco moltiplicato pel diametro della sfera ; e l'unghia per misura il prodotto del fuso moltiplicato pel terzo del raggio della sfera medesima* (fig. 65)

Dim. Imperocchè; si ha dalla proposizione precedente che il fuso AMNB sta alla superficie sferica come l'arco MN alla circonferenza MNP ; per conseguenza il fuso accennato sta alla superficie sferica come l'arco MN moltiplicato pel diametro MP sta alla circonferenza MNP moltiplicata per lo stesso diametro. Ma la circonferenza MNP moltiplicata pel suo diametro è la misura della superficie sferica , dunque il fuso ha per misura l arco MN , che misura il suo angolo, moltiplicato pel diametro della sfera.

In secondo luogo , essendo l'unghia sferica alla sfera come il fuso alla superficie sferica , sarà l'unghia alla sfera come il fuso moltiplicato pel terzo del raggio della sfera sta alla superficie sferica moltiplicata pel terzo dello stesso raggio. Ma la superficie sferica moltiplicata pel terzo del raggio della sfera è la misura di questa , dunque l'unghia avrà per misura il fuso moltiplicato pel terzo del raggio della sfera.

335. *Corollario* I. Il settore circolare MON avendo per misura il prodotto dell' arco MN per la metà del raggio MO , sarà in virtù della proposizione precedente il fuso AMBN quadruplo del detto settore. Quindi il triangolo sferico birettangolo AMN , che è metà del fuso , sarà doppio dello stesso settore circolare. Che se poi il triangolo AMN fosse trirettangolo, allora la sua aja sarebbe uguale a quella di un semicircolo massimo, cioè sarebbe la ottava parte della superficie sferica; e per conseguenza la superficie sferica potrà essere rappresentata da otto triangoli sferici trirettangoli.

336. *Corollario* II. Se dunque si prenda per unità delle superficie sferiche il triangolo trirettangolo, che chiameremo K , e per unità di angolo l'angolo retto , che chiameremo R , si avrà la proporzione qui appresso.

Fuso AMBN : 8K :: *arco* MN : *circ.* MNP.

ovvero , chiamando A l' angolo del fuso ,

Fuso AMBN : 8K :: A : 4R ,

e moltiplicando per 2 i termini della seconda ragione ,

Fuso AMBN : 8K :: 2A : 8R ,

e dividendo per 8 i conseguenti.

Fuso AMBN . K :: 2 A : R.

Ma in luogo di K, e R si possono mettere le unità che rappresentano , dunque si avrà in fine.

Fuso AMBN = 2A.

vale a dire che il *fuso è uguale al doppio del suo angolo.*

Questa espressione è di pura convenzione : poichè essa serve a dinotare sotto forma abbreviata la proporzione or ora ottenuta ,

cioè che il fuso sta al triangolo trirettangolo, che è l'unità superficiale, come il doppio dell' angolo del fuso sta all angolo retto, che è l' unità angolare. La differenza sta dunque in questo; cioè, che nella proporzione le due unità, superficiale, ed angolare, sono espresse, mentre nella uguaglianza.

Fuso AMBN = 2A.

le stesse unità si devono sottintendere; il che non può mai produrre equivoco di sorta, e molto meno indurre in errore.

PROPOSIZIONE CXXV — *TEOREMA*.

337. *L'aja di un triangolo sferico ha per misura il raggio della sfera multiplicato per la somma dei tre archi, che misurano i tre angoli del triangolo, diminuita di una mezza circonferenza* (fig. 66).

Dim. Sia ABC un triangolo sferico. Si prolunghino i tre lati, finchè si formino le circonferenze intere delle quali fan parte, BADE CAFE, BCDF. E poichè le circonferenze de' circoli massimi s' intersegano alla distanza di 180° (n° 222), gli archi ACE, BCD, CAF saranno mezze circonferenze; e le rette AE, BD, CF saranno diametri della sfera.

Ciò premesso, i triangoli ABC, BCE formano il fuso compreso dalle mezze circonferenze ABE, ACE, e che ha per angolo A. Similmente, i triangoli ABC, ACD formano il fuso compreso dalle mezze circonferenze BAD. BCD, il cui angolo è B: e finalmente, i triangoli CED, FED formano il fuso compreso dalle mezze circonferenze CEF, CDF, che ha per angolo C. Ma i triangoli ABC,FED sono simmetrici, perchè sono simmetrici gli angoli triedri OABC, OEDF (n° 309), dunque le loro aie sono eguali; e però i triangoli accennati equivalgono al fuso, che ha per angolo C.

Quindi se a' triangoli BCE, CED, ACD si aggiunga il triplo del triangolo ABC la somma sarà eguale a quella dei tre fusi accennati. Ma la prima somma è uguale alle superficie dell' emisfero ABEDC più due volte il triangolo ABC, dunque la seconda somma, cioè quella dei tre fusi, equivale alla superficie dell'emisfero più due volte il triangolo ABC; e per conseguenza il doppio di questo triangolo sarà eguale alla somma dei tre fusi, diminuita della superficie dell'emisfero. Or ciascuno di quelli fusi equivale al prodotto dell'arco, che misura il proprio angolo, pel diametro della sfera e la superficie dell'emisfero ha per misura il prodotto di una semicirconferenza di circolo massimo pel diametro medesimo, dunque il triangolo ABC preso due volte è uguale al diametro moltiplicato per la somma dei tre archi, che misurano i tre angoli del triangolo, diminuita di una mezza circonferenza; e perciò il triangolo ABC avrà per misura il raggio della sfera moltiplicato per la somma dei detti archi diminuita di una mezza circonferenza, come si doveva dimostrare.

338. *Corollario* I. La superficie della sfera avendo per misura il

diametro moltiplicato per la circonferenza di un circolo massimo, ovvero il raggio moltiplicato per due volte la circonferenza di un circolo massimo, segue dalla proposizione qui sopra dimostrata, che la superficie del triangolo sferico sta a quella della sfera come la somma dei tre archi, che misurano gli angoli del triangolo, diminuita di una mezza circonferenza sta a due circonferenze di circolo massimo.

Quindi mettendo in luogo degli archi gli angoli da essi misurati, si avrà che

La superficie del triangolo sferico sta a quella della sfera come l'eccesso della somma dei tre angoli del triangolo sopra due angoli retti sta ad otto angoli retti.

339. *Corollario* II. Dal corollario precedente si deduce che se si dinota con E l'eccesso della somma dei tre angoli del triangolo sopra due retti, e si prende per unità delle superficie sferiche il triangolo trirettangolo, e per unità degli angoli l'angolo retto, e di più si osservi che la superficie sferica è uguale ad otto triangoli trirettangoli, il teorema sopraccennato sarà espresso dalla proporzione

Triangolo ABC: 8 :: E : 8,

dalla quale si deduce evidentemente

Triangolo ABC = E.

Quindi si potrà dire che

L'aja di un triangolo sferico qualunque ha per misura l'eccesso della somma dei suoi tre angoli sopra due angoli retti.

Questa espressione abbreviata è di pura convenzione, e non può produrre veruno equivoco, allorchè vi si sottintendano le due unità, cioè l'una che serve di misura alle superficie sferiche, e l'altra agli angoli.

340. *Scolio*. Giova ancora osservare, che se si dividono per 8 i conseguenti della proporzione

Triangolo ABC: 8 :: E: 8,

si avrà che

L'aja di un triangolo sferico sta al triangolo trirettangolo come l'eccesso della somma dei tre angoli del primo sopra due angoli retti sta all'angolo retto.

PROPOSIZIONE CXXVI — *TEOREMA.*

341. *L'aja d'un poligono sferico ha per misura la somma dei suoi angoli, diminuita del prodotto di due angoli retti pel numero dei lati del poligono meno due* (fig. 59).

Dim. Sia ABCDE un poligono sferico. Da un vertice A di questo poligono si conducano a tutti gli altri vertici le diagonali AC, AD; il poligono proposto sarà diviso in tanti triangoli, quanti ne dinota il numero de' lati meno due. Or l' aja di ciascun triangolo ha per misura la somma de' suoi tre angoli meno due angoli retti (n° 329); ed è poi manifesto che la somma di tutti gli angoli dei

triangoli è uguale alla somma degli angoli del poligono, dunque l'aja de lo stesso poligono dovrà avere per misura la somma de' suoi angoli diminuita di tante volte due angoli retti, quante ne denota il numero dei lati meno due.

342. *Scolio*. Per unità di misura delle superficie si prende ordinariamente il quadrato, che ha per lato l'unità di lunghezza. Stando a questa convenzione abbiam dato (n° 332) la misura del fuso, e del triangolo sferico, riducendo l'una e l'altra a quella di un rettangolo. Purtuttavolta abbiamo fatto vedere che si poteva prendere il triangolo trirettangolo per unità delle superficie sferiche, ed allora abbiam conosciuto l'espressione delle aje del fuso, e del triangolo sferico, che risultavano, le quali davano luogo ad altre espressioni semplicissime, abbenchè fossero di semplice convenzione. Nella misura del poligono sferico si è resa manifesta l'utilità di queste espressioni; per mezzo di esse si abbreviano le dimostrazioni, e si ritengono facilmente le verità della scienza.

Misura della piramide sferica, e dell'angolo solido al vertice di essa.

PROPOSIZIONE CXXVII — *TEOREMA*.

343. *La piramide sferica triangolare ha per misura il prodotto della sua base pel terzo del raggio* (fig 66).

Dim. Sia ABCO una piramide sferica triangolare. Si ripeta la costruzione fatta nella proposizione (n° 337), ed in luogo de' triangoli sferici, e dei fusi si sostituiscano le piramidi triangolari, e le unghie sferiche corrispondenti. Si dimostrerà come nella proposizione accennata che la piramide ABCO presa due volte equivale alla somma delle tre unghie sferiche, che hanno per angoli rispettivi A, B, C, diminuita dell'emisfero ACDEB. Ma ciascuna di quelle unghie è uguale al prodotto del fuso corrispondente pel terzo del raggio (n° 334), e l'emisfero ha per misura il prodotto di mezza superficie sferica pel terzo del raggio (n° 266), dunque la piramide ABCO presa due volte è uguale al terzo del raggio moltiplicato per la somma de' tre fusi, diminuita di mezza superficie sferica. Or i tre fusi equivalgono alla metà della superficie della sfera più due volte il triangolo ABC (n° 337), per conseguenza la piramide ABCO dovrà avere per misura il prodotto della sua base pel terzo del raggio come si doveva dimostrare.

344. *Corollario* I. Potendosi una piramide sferica poligonale scomporre in piramidi sferiche triangolari, segue che

Una piramide sferica qualunque ha per misura il prodotto del poligono sferico, che è base della piramide, pel terzo del raggio.

345. *Corollario* II. Due piramidi sferiche qualunque stanno come le loro basi.

346. *Corollario* III. Poichè la sfera ha per misura il prodotto della sua superficie pel terzo del raggio, ne consegue che

La piramide triangolare sferica sta alla sfera come il triangolo sferico, che forma la base della piramide, sta alla superficie sferica.

Se dunque si prenda per unità di superficie il triangolo sferico trirettangolo, e per unità di volume la piramide trirettangola, cioè quella che ha per base il triangolo trirettangolo: e di più si tenga presente che la sfera è uguale ad otto piramidi trirettangole, e la superficie sferica ad otto triangoli trirettangoli, si avrà che

La piramide triangolare sferica sta alla piramide trirettangola come il triangolo sferico, che forma la base della prima, sta al triangolo trirettangolo che è la base della seconda.

PROPOSIZIONE CXXVIII — *TEOREMA.*

347. *Se per i punti* O, *ed o presi su gli spigoli di due angoli diedri* MCDN, mcdn, *si conducano i piani* AOB, aob *perpendicolari agli spigoli medesimi, gli angoli solidi triedri* OABD, oabd, *staranno fra loro come gli angoli piani corrispondenti agli angoli diedri*(fig. 17).

Dim. Nel piano AOB si descriva col centro in O, e con un raggio ad arbitrio l'arco AB: si pratichi lo stesso nel piano *aob*, prendendo per raggio *oa* = OA.

Ciò premesso, si supponga in primo luogo che gli archi AB, *ab* siano commensurabili, e che la loro comune misura sia contenuta *m* volte nell'arco AB, ed *n* volte nell'arco *ab*. Si divida l'arco AB in *m* parti eguali, portando la comune misura sopra di esso, e l'arco *ab* in *n* parti eguali, poi si congiungano i punti di divisione col centro O, e col centro *o*, le rette congiungenti, come EO, *eo*, saranno raggi, che divideranno l'angolo AOB in *m* parti eguali, e l'angolo *aob* in *n* parti eguali. Or, se per tutti questi raggi, e per gli spigoli DC, *dc* si facciano passare de' piani come EDC, *edc*, l'angolo solido triedro OABD sarà diviso in *m* angoli sol di triedri eguali fra loro, perchè l'uno può coincidere coll' altro, essendo ognuno formato da due angoli retti, come DOA, DOE, e da un angolo eguale all'angolo AOE. Lo stesso si dimostra per l'angolo triedro *oabd*, e per conseguenza i due angoli triedri accennati stanno come gli archi AB, *ab*, o come gli angoli piani AOB, *aob*, o in fine come gli angoli diedri DC, *dc*.

Se gli archi AB, *ab* fossero incommensurabili, avrebbe luogo la stessa proporzione, e ciò si dimostrerebbe come si è fatto nella geometria piana per gli angoli ai centri di cerchi eguali.

348. *Corollario.* Se si suppone che l'angolo diedro *dc* sia retto, gli angoli triedri *oabd*, *oabc*, saranno ambidue trirettangoli: e però sarà l'angolo diedro DC all'angolo diedro retto *dc* come la somma dei due angoli triedri OABD, OABC, che compongono il primo,

alla somma dei due angoli triedri trirettangoli, *oabd*, *oabc*, che compongono il secondo.

349. *Scolio*. Si noti che la proporzione accennata nel corollario precedente sussiste anche quando il piano AOB non è perpendicolare allo spigolo DC. Infatti, è manifesto che se in tal caso si conduca pel punto O un piano perpendicolare allo spigolo DC, la somma dei due angoli triedri, che ne risultano, sarà eguale a quella degli angoli triedri OABD, OABC. Or, l'angolo diedro DC ha per misura l'angolo piano corrispondente MCK, ovvero C, dunque se si prenda per unità degli angoli diedri l'angolo diedro retto, e per unità degli angoli triedri l'angolo triedro trirettangolo, la proporzione sopra mentovata diviene

$$C : 1 :: OABD + OABC : 2;$$

e facendo il prodotto degli estremi, e quello del medj, risulta

$$OABD + OABC = 2C,$$

vale a dire, sarà la somma dei due angoli triedri OABD, OABC eguale al doppio dell'angolo diedro DC; o in altri termini che il valore numerico della somma dei due angoli triedri è doppio del valore numerico dell'angolo diedro. L'eguaglianza accennata è di pura convenzione, e non può indurre in errore, come abbiamo osservato in altri casi analoghi.

PROPOSIZIONE CXXIX — *TEOREMA*.

350. *Un angolo triedro qualunque sta all'angolo triedro trirettangolo come la somma delle misure de' tre angoli diedri del primo, diminuita di due angoli retti, sta all'angolo retto* (fig. 66).

Dim. Sia OABC un angolo triedro qualunque. Si consideri il suo vertice O come il centro di una sfera, che abbia un raggio OA preso ad arbitrio, e si ripeta la costruzione fatta (n° 337).

Per le cose dette nello scolio precedente il valore numerico della somma dei due angoli triedri OABC, OBCE, è doppio di quello dell'angolo diedro corrispondente, la cui misura è l angolo A, per conseguenza si avrà.

$$OABC + OBCE = 2A.$$

Similmente si dimostra che il valore numerico della somma degli angoli triedri OABC, OACD, è doppio di quello dell'angolo diedro, che ha per misura l'angolo B; e finalmente il valore numerico della somma degli angoli triedri OCED, OEDF, ovvero OCED, OABC, perchè OEDF è simmetrico ad OABC, sarà doppio dell'angolo diedro, che ha per misura l'angolo C. Quindi ragionando come si è fatto nella misura della piramide sferica triangolare (n° 343), si dimostrerà che il valore numerico dell'angolo triedro OABC preso due volte è uguale a quello della somma de' valori numerici dei tre angoli diedri accennati, diminuita di quello de' quattro triedri OABC, OBCE, OCED, OACD, che si appoggiano sull'emisfero. Ma questi equivalgono a quattro triedri trirettangoli, ed il valore numerico

di due triedri trirettangoli è doppio di quello di un angolo diedro retto, dunque il valore numerico dell'angolo triedro OABC preso due volte è espresso da

$$2A + 2B + 2C - 4;$$

e per conseguenza sarà

$$OABC = A + B + C - 2.$$

Dalle cose precedenti è manifesto che questa espressione OABC dinota il rapporto di questo angolo triedro all'angolo triedro trirettangolo, che è la sua unità di misura, e che $A + B + C - 2$ indica il rapporto della somma delle misure de' tre angoli diedri del primo, diminuita di due angoli retti, all angolo retto, poichè l' angolo retto essendo la misura dell'angolo diedro retto si può considerare come l'unità di misura degli angoli diedri, quindi il teorema proposto rimane dimostrato.

351. *Scolio*. Paragonando la misura dell'angolo triedro al vertice della piramide triangolare sferica ABCO con quella del triangolo sferico ABC (n° 338) si vedrà che l' una, e l' altra è espressa da $A + B + C - 2$. Ma si è dimostrato (n° 345) che due piramidi sferiche triangolari, ed in generale due piramidi sferiche qualunque, che fanno parte di una medesima sfera, o di sfere uguali, stanno come i triangoli, o i poligoni sferici, che formano le loro basi, dunque.

Gli angoli solidi ai vertici delle piramidi accennate stanno essi pure nella proporzione delle basi.

Da ciò si deduce che quando si volesse determinare il rapporto di due angoli solidi qualunque, bisognerebbe immaginare descritte dai loro vertici come centri due superficie sferiche dello stesso raggio, e paragonare le aje de' poligoni intercetti fra le loro facce.

Se dunque si prende per unità di misura delle aje di quei poligoni il triangolo trirettangolo, e per unità di misura degli angoli solidi l'angolo triedro trirettangolo, il numero che dà l'aja del poligono sferico darà pure la misura dell'angolo solido corrispondente. Per esempio, se l'aja del poligono sferico è espressa da 4/5, vale a dire se è i 4/5 del triangolo trirettangolo, l'angolo solido corrispondente sarà ancora i 4/5 dell'angolo triedro trirettangolo.

Risoluzione di alcuni problemi.

PROPOSIZIONE CXXX — *PROBLEMA.*

352. ***Essendo dati i tre lati di un triangolo sferico, trovare i suoi angoli*** (fig. 67).

Soluzione. In luogo del triangolo sferico, si considerà l' angolo triedro, che risulta unendo i tre vertici del triangolo proposto col centro della sfera.

Sia dunque SABC un angolo triedro, di cui sono dati tre angoli piani, ASB, BSC, ASC, e supponiamo primieramente che si voglia

trovare l'angolo diedro ASBC. Per un punto O dello spigolo SB s' innalzino su questo nelle facce ASB, BSC le perpendicolari OM, ed ON, l'angolo MON è l'angolo che si vuole determinare, poichè esso è la misura dell' angolo diedro ASBC. Si prenda sul prolungamento di SO un punto B ad arbitrio, e sopra SA un punto A in modo che la retta BA incontri OM in un punto M situato fra B ed A (n° 70). Similmente si prenderà sopra SC un punto C tale che la retta BC incontri ON in un punto N situato fra B e C, Finalmente si condurranno le rette AC, MN.

Ciò premesso, si facciano sopra un piano gli angoli *asb*, *bcs*, *csa* respettivamente uguali agli angoli ASB, BSC, ASC della figura solida; prendasi *sa*=SA, *sb*=SB, *sc*=SC, e si uniscano *ab*, *bc*, *ca'*. I triangoli *asb*, *bsc*, *csa* saranno respettivamente uguali ai triangoli ASB, BSC, CSA, perchè hanno un angolo uguale compreso fra lati uguali. Se dunque colle rette *ab*, *bc*, *ca'* si costruisce un triangolo *a''bc*, questo triangolo sarà uguale al triangolo ABC, poichè i loro lati sono respettivamente uguali.

Si prenda ora *bo* = BO, e che nella figura piana come in quella solida può esser qualunque, pel punto *o* si conduca *mn* perpendicolare sopra *sb*; il triangolo *mob* sarà uguale al triangolo MOB, poichè hanno un lato *bo*=BO, adiacente a due angoli uguali ciascuno a ciascuno, cioè *mob*=MOB come retti, e *mbo*=MBO a cagione della uguaglianza dei triangoli *asb*, ed ASB. Per la stessa ragione saranno uguali i triangoli *bon*, e BON, onde si avrà *om*=OM; ed *on*=ON.

Si faccia inoltre *bm'*=*bm*, e si congiunga *m'n*, il triangolo *m'bn* sarà uguale al triangolo MBN; poichè hanno due lati uguali ciascuno a ciascuno, cioè *bm'*=*bm*=BM, e *bn*=BN; e questi lati sono compresi fra gli angoli *cba''*, e CBA uguali in virtù della uguaglianza dei triangoli *a''bc*, ed ABC. Quindi sarà *m'n*=MN.

Se dunque colle rette. *om*, *on*, *m'n* si costruisca il triangolo *m'no'* questo triangolo sarà uguale al triangolo MON; dappoichè questi triangoli avranno i loro tre lati uguali ciascuno a ciascuno. Laonde l'angolo *m'o'n* sarà uguale all' angolo cercato MON.

Nello stesso modo si potranno ottenere i due altri angoli driedri, ossia gli angoli piani che li misurano.

353. *Scolio*. È facile vedere che la costruzione precedente può sempre applicarsi, qualunque sieno i tre angoli piani, purchè sono tali da poter formare un angolo triedro. Si vede ancora che il problema ammette una sola soluzione

PROPOSIZIONE CXXXI — *PROBLEMA*.

354. ***Essendo dati i tre angoli di un triangolo sferico; trovare i suoi tre lati.***

Soluzione. Sostituendo al triangolo proposto l'angolo triedro che gli corrisponde, il problema si riduce a trovare gli angoli piani

di un angolo triedro allorchè sono dati i suoi angoli diedri M, N, P. Ciò posto, si chiami d l'angolo retto, e si consideri l' angolo triedro supplementario, gli angoli piani di questo saranno espressi da $2d$—M, $2d$—N, e $2d$—P. Quindi applicando le costruzioni fatte nella proposizione precedente si potranno determinare successivamente i tre angoli diedri dell' angolo triedro supplementario. Siano A, B, C questi tre angoli diedri, è manifesto che gli angoli piani dell'angolo triedro proposto verranno espressi respettivamente da $2d$—A, $2d$—B, e $2d$—C, e però il problema sarà risoluto.

PROPOSIZIONE CXXXII — *PROBLEMA*

355. *Essendo dati due lati di un triangolo sferico, e l'angolo da essi compreso, trovare il terzo lato* (fig. 67).

Soluzione. Questo problema si riduce al seguente: dati in un angolo triedro due angoli piani e l'angolo diedro compreso, trovare il ter o angolo piano. Siano dunque ASB, e BSC i due angoli piani dati, s innalzino sopra SB le perpendicolari OM, ed ON, e si ripeta la costruzione fatta (n° 342), l'angolo MON essendo la misura dell'angolo diedro ASBC che si suppone dato, si conoscono nel triangolo MON due lati e l'angolo compreso. Quindi si può costruire questo triangolo, e dedurne l'angolo piano incognito ASC.

Infatti si costruiscano sopra un piano gli angoli asb, e bsc respettivamente uguali agli angoli ASB, e BSC della figura solida; e si prenda sa=SA, sb=SB, sc=SC. I triangoli asb, e bsc saranno respettivamente uguali ai triangoli ASB, e BSC. Si faccia inoltre bo =BO, e pel punto o si conduca la retta mn perpendicolare a sb; i triangoli mob e nob saranno rispettivamente uguali ai triangoli MOB, e NOB.

Ciò premesso, si costruisca un triangolo $m''o''n''$, in cui l'angolo $m''o''n''$ sia uguale all'angolo dato formato dalle facce ASB e BSC, e sia $m''o''$=mo=MO, e $n''o''$=no=NO. Questo triangolo sarà uguale al triangolo MON, poichè avranno un angolo uguale compreso fra lati uguali; e ne risulterà $m''n''$=MN.

Coi lati mb, bn, e $m''n''$ si costruisca il triangolo $m'bn$; questo triangolo sarà uguale al triangolo MBN; poichè avranno i loro tre lati uguali ciascuno a ciascuno.

Su la retta bm' si prenda ba''=ba, e si congiunga ca'', il triangolo $a''bc$ sarà uguale al triangolo ABC, poichè gli angoli $a''bc$, ed ABC sono uguali a cagione della uguaglianza dei triangoli $m'bn$, e MBN, e di più si ha bc=BC, e ba''=ba=BA.

Da ciò risulta ancora $a''c$=AC. Si costruisca dunque un triangolo $a'sc$, di cui i lati sc, e sa' sieno uguali, e la base s a eguale ad $a''c$; questo triangolo sarà uguale al triangolo ASC, poichè essi avranno i loro tre lati uguali ciascuno a ciascuno. L'angolo a' sc sarà dunque il terzo angolo piano richiesto.

356. *Scolio.* Conoscendo il terzo angolo piano, si potranno ottenere i due altri angoli diedri colla costruzione del n° 342.

È facile poi vedere che il problema proposto ammette una sola soluzione.

PROPOSIZIONE CXXXIII — *PROBLEMA.*

357. ***Essendo dati un lato ed i due angoli adiacenti di un triangolo sferico, trovare i rimanenti lati, ed il terzo angolo.***

Soluzione. Sostituendo al triangolo sferico l'angolo triedro corrispondente, rappresentino A l'angolo piano dato M, ed N gli angoli che servono di misura agli angoli diedri adiacenti dati. In virtù del teorema del n° 68, l'angolo triedro supplementario avrà due angoli piani uguali a $2d$—M, ed a $2d$—N; e l'angolo diedro compreso sarà espresso da $2d$—A (chiamando d l'angolo retto).

Applicando le costruzioni del problema precedente, si potrà determinare il terzo angolo piano del triedro supplementario, e poi colle costruzioni del n° 342, i suoi due altri angoli diedri. Sieno P il terzo angolo piano, B e C i due angoli diedri così determinati, l'angolo triedro proposto avrà necessariamente un terzo angolo diedro espresso da $2d$—P, ed i due altri angoli piani saranno respettivamente uguali a $2d$—B, ed a $2d$—C. Quindi tutte le sue parti saranno conosciute.

358. *Scolio.* La risoluzione de' problemi precedenti fa vedere che coll'ajuto dell'angolo triedro supplementario essi si riducono a due soli. Così pure, se fossero dati di un triangolo sferico due lati ed un angolo opposto ad uno di questi lati, ovvero due angoli ed un lato opposto ad uno di questi angoli, la risoluzione dei due problemi accennati si ridurrebbe a quella di uno di essi in virtù dell' angolo diedro supplementario; ma noi non ci occuperemo di siffatta risoluzione, perchè non può farsi compiutamente colla pura geometria, senza ricorrere a costruzioni complicate, per cui la rimettiamo ai trattati di trigonometria sferica.

SCOLIO GENERALE.

359. Le proposizioni relative alla misura delle solidità dei poliedri, e quelle spettanti alla misura delle superficie e delle solidità dei tre corpi rotondi, essendo di una grande importanza nelle applicazioni pratiche della geometria, abbiamo stimato di dare in questo luogo l'espressioni le più brevi possibili delle principali misure fra quelle sopraccennate; e ciò si ottiene coll'ajuto dei simboli algebrici

I. Sia B la base di un prisma, H la sua altezza; la solidità del prisma sarà espressa da B×H.

II. Sia B la base di una piramide, H la sua altezza; la solidità della piramide verrà espressa da B× $\frac{1}{3}$ H.

III. Sia H l'altezza di un tronco di piramide a basi parallele, e siano A, e B le sue basi; sarà $\sqrt{AB}$ la media proporzionale fra queste basi; e però la solidità del tronco di piramide sarà.

$$\tfrac{1}{3}H\times(A+B+\sqrt{AB})$$

IV. Sia B la base di un tronco di prisma triangolare, H, H', H'', le altezze de' suoi tre vertici superiori la solidità del prisma troncato sarà.

$$\tfrac{1}{3}B\times(H+H'+H'').$$

V. Sia R il raggio della base di un cilindro, H la sua altezza. La base sarà espressa da πR^2, come si è veduto nella geometria piana; e la solidità del cilindro sarà $\pi R^2\times H$.

VI. La circonfenza della base sopraccennata essendo espressa da $2\pi R$, la superficie curva del cilindro sarà $2\pi R\times H$.

VII. Sia R il raggio della base di un cono, H la sua altezza, la solidità del cono sarà.

$\tfrac{1}{3}\pi R^2\times H$; e se si dinoti con E il lato del cono medesimo, la superficie curva di questo sarà πRE. Di più se si chiami r il lato del quadrato equivalente al rettangolo $R\times E$, la superficie curva del cono sarà espressa da πr^2; e per conseguenza questa superficie sarà equivalente al cerchio, che ha per raggio la media proporzionale fra il raggio della base, e l'altezza del cono.

VIII. Siano A e B i raggi delle basi di un tronco di cono a basi parallele, H la sua altezza; la solidità del tronco di cono sarà

$$\tfrac{1}{3}\pi H\times(A^2+B^2+AB).$$

IX. Sia R raggio della sfera la sua superficie sarà $4\pi R^2$, e la sua solidità verrà espressa da $\tfrac{4}{3}\pi R^3$, ovvero da $\tfrac{1}{6}\pi D^3$, dinotando con D il diametro della sfera medesima.

X. Sia R il raggio di un settore sferico, H l'altezza della zona, che gli serve di base; la solidità del settore sarà

$$\tfrac{2}{3}\pi R^2\times H.$$

XI. Sia R il raggio della sfera, ed H l'altezza di una zona, l'espressione di questa sarà $2\pi R\times H$.

XII. Sia R il raggio di una sfera, ed H l'altezza di un segmento sferico ad una base, la solidità del segmento sarà

$$\tfrac{1}{3}\pi H^2\times(3R-H),$$

ovvero $\pi H^2\times(R-\tfrac{1}{3}H)$....... (m).

Se in luogo del raggio della sfera si volesse introdurre in questa espressione il raggio BE (fig. 52)della base del segmento, che chiameremo K, si osserverà che BE è media proporzionale fra AE, ed ED, ossia fra H, e 2R—H; per conseguenza sarà $K^2=2RH-H^2$, donde si deduce $R=\frac{K^2+H^2}{2H}$. Sostituendo questo valore nell'espressione (m), e facendo le riduzioni opportune, la solidità del segmento sferico ad una base sarà espressa da

$$\pi K^2\times\frac{H}{2}+\frac{\pi H^3}{6},$$

vale a dire che

Ogni segmento sferico ad una base equivale alla metà del cilindro, che ha la stessa base e la stessa altezza, più la sfera, che ha questa altezza per diametro.

E poichè il segmento sferico a due basi parallele è uguale alla differenza di due segmenti sferici, ciascuno de' quali ha una sola base, si rende manifesto che

Ogni segmento sferico compreso fra due piani paralleli, ha per misura la semi somma delle sue basi multiplicata per la sua altezza, più la solidità della sfera, che ha questa stessa altezza per diametro.

Del resto possiamo assicurarci di questa verità, osservando che se la misura del segmento sferico a due basi fosse diversa dalla precedente, quando uno dei piani paralleli accennati diviene tangente alla sfera, la misura del segmento sferico ad una base, che allora risulterebbe, non sarebbe più quella dimostrata qui sopra.

Se dunque si chiamino P e Q le due basi di un segmento sferico, e H la sua altezza, la solidità di questo segmento sarà

$$\frac{P+Q}{2}\times H+\frac{\pi H^3}{6}.$$

È manifesto che questa espressione si può anche applicare al segmento, che abbia una sola base P; poichè in tal caso l'espressione accennata si riduce a

$$\frac{P}{2}\times H+\frac{\pi H^3}{6}.$$

INDICE

LIBRO PRIMO.

DE' PIANI E DEGLI ANGOLI SOLIDI.

LIBRO II.

DEI SOLIDI TERMINATI DA SUPERFICIE PIANE.

LIBRO III.

DEI TRE CORPI ROTONDI E DEI TRIANGOLI SFERICI.

Fig 2
Fig 3.
Fig 6.
Fig 4.
Fig 12.
Fig. 17.
Fig. 20.
Fig 23.
Fig 21.
Fig 25

Fig. 24.

Fig. 31.
Fig 36.
Fig.40.
Fig.43.
Fig.46.